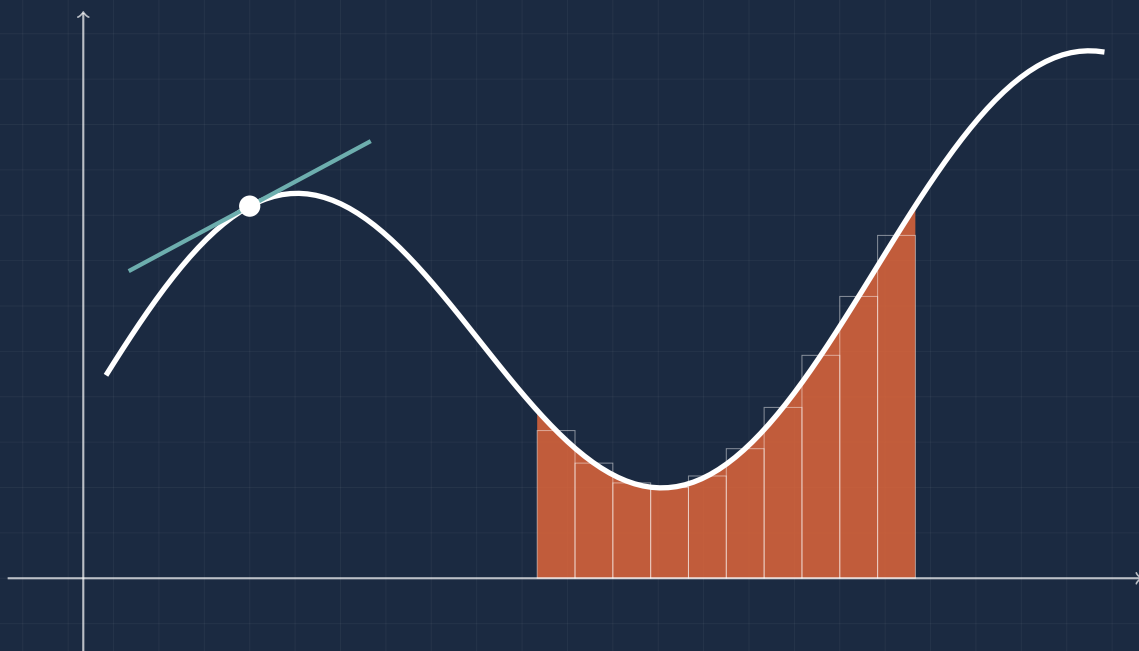


CURSO COMPLETO DE CÁLCULO

Derivadas e Integrales

de 0 a 100

Del primer límite a las ecuaciones diferenciales,
paso a paso y con ejercicios resueltos



$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

Derivadas e Integrales de 0 a 100

Curso completo de cálculo diferencial e integral.

Primera edición, octubre de 2026.

Notación: en este libro se escribe $\text{sen } x$ para el seno y $\text{tg } x$ para la tangente, como es habitual en España; $\ln x$ es el logaritmo natural. Las soluciones de todos los ejercicios están en el Apéndice C.

Índice

Cómo usar este libro	6
1 Funciones y límites	7
1.1 Qué es una función	7
1.2 La idea de límite	7
1.2.1 Cómo se calculan en la práctica	8
1.2.2 Límites notables	9
1.3 Continuidad	9
2 La derivada: el concepto	11
2.1 Pendiente de una curva	11
2.2 Interpretaciones	12
2.3 Derivable implica continua	12
3 Reglas de derivación	14
3.1 Derivadas básicas	14
3.2 Reglas de operación	15
3.3 Derivadas de orden superior	15
4 Regla de la cadena y derivación implícita	17
4.1 La regla de la cadena	17
4.2 Derivación implícita	18
4.3 Derivación logarítmica	18
4.4 Derivada de la función inversa	19
5 Aplicaciones de la derivada	20

5.1	Crecimiento y extremos	20
5.2	Concavidad e inflexión	21
5.3	Optimización	21
5.4	Tasas relacionadas	21
5.5	Regla de L'Hôpital	22
5.6	Aproximación lineal	22
6	La integral indefinida	24
6.1	Antiderivadas	24
6.2	Tabla de integrales inmediatas	24
6.3	Linealidad	25
7	Técnicas de integración	26
7.1	Cambio de variable (sustitución)	26
7.2	Integración por partes	26
7.3	Integrales trigonométricas	27
7.4	Sustitución trigonométrica	28
7.5	Fracciones parciales	28
8	La integral definida	30
8.1	Área bajo una curva: sumas de Riemann	30
8.2	El Teorema Fundamental del Cálculo	31
8.3	Valor medio de una función	32
9	Aplicaciones de la integral	33
9.1	Área entre curvas	33
9.2	Volúmenes de revolución	34
9.3	Longitud de arco	34
9.4	Aplicaciones físicas	34
10	Integrales impropias y series de Taylor	36
10.1	Integrales impropias	36

10.2	Polinomios y series de Taylor	37
11	Más allá: varias variables y ecuaciones diferenciales	40
11.1	Derivadas parciales	40
11.2	Integrales dobles	41
11.2.1	Coordenadas polares	41
11.3	Ecuaciones diferenciales	41
11.3.1	Variables separables	41
11.3.2	Lineales de primer orden	42
11.3.3	Lineales de segundo orden con coeficientes constantes	42
A	Formulario de derivadas	44
B	Formulario de integrales	45
C	Soluciones de los ejercicios	46

Cómo usar este libro

Este libro te lleva desde el nivel 0 (sabes qué es una función, poco más) hasta el nivel 100 (derivadas parciales, integrales dobles y ecuaciones diferenciales). Cada capítulo empieza con una barra que indica en qué tramo del camino estás:



La progresión es lineal: cada capítulo usa lo anterior. Si ya dominas un tema, lee los ejemplos y haz los ejercicios; si los resuelves sin mirar, salta al siguiente.

Tramo	Capítulos	Qué sabrás hacer
0-20	1-2	Calcular límites y entender qué es una derivada
20-55	3-5	Derivar cualquier función y optimizar
55-82	6-8	Integrar con todas las técnicas clásicas
82-94	9-10	Calcular áreas, volúmenes, integrales impropias y series
94-100	11	Varias variables y ecuaciones diferenciales

Cada capítulo tiene cuatro tipos de recuadro:

- **Definición y Teorema:** lo que hay que saber de memoria.
- **Ejemplo:** un problema resuelto paso a paso.
- **Truco:** atajos y errores típicos.
- **Ejercicios:** para practicar; soluciones en el Apéndice C.

Funciones y límites



1.1 Qué es una función

Una función f asigna a cada número x de su *dominio* un único número $f(x)$. Por ejemplo, $f(x) = x^2$ asigna a 3 el valor 9. La gráfica de f es el conjunto de puntos $(x, f(x))$.

Las funciones con las que trabajaremos en todo el libro son las **elementales**:

- Polinomios: $3x^4 - 2x + 1$.
- Racionales (cocientes de polinomios): $\frac{x+1}{x^2-4}$.
- Potencias y raíces: $\sqrt{x} = x^{1/2}$, $1/x^3 = x^{-3}$.
- Exponencial y logaritmo: e^x , $\ln x$ (inversas entre sí).
- Trigonométricas: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, y sus inversas $\arcsen x$, $\operatorname{arctg} x$.

Truco. Reescribe siempre raíces y fracciones como potencias: $\frac{5}{\sqrt[3]{x^2}} = 5x^{-2/3}$.
Derivar e integrar potencias es lo más fácil del cálculo.

1.2 La idea de límite

Escribimos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

cuando los valores de $f(x)$ se acercan tanto como queramos a L al tomar x suficientemente cerca de a (pero distinto de a). Lo que pasa *exactamente* en $x = a$ no importa.

Definición (formal)

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$.

1.2.1 Cómo se calculan en la práctica

1. **Sustituye.** Si f es elemental y está definida en a , el límite es $f(a)$.
2. **Si sale $\frac{0}{0}$,** simplifica: factoriza, racionaliza o usa un límite notable.
3. **Si $x \rightarrow \infty$** en un cociente de polinomios, divide entre la mayor potencia del denominador.

Ejemplo: factorizar

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4.$$

Ejemplo: racionalizar

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+9} - 3)(\sqrt{x+9} + 3)}{x(\sqrt{x+9} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+9} + 3} = \frac{1}{6}.$$

Ejemplo: en el infinito

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - x}{2x^3 + 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - 1/x^2}{2 + 7/x^3} = \frac{5}{2}.$$

1.2.2 Límites notables

Teorema (límites fundamentales)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Ejemplo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 \cdot \frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} = 3 \cdot 1 = 3.$$

1.3 Continuidad

Definición

f es **continua** en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Intuitivamente: la gráfica se dibuja sin levantar el lápiz.

Todas las funciones elementales son continuas en su dominio. Los problemas aparecen en puntos donde se divide entre cero o en funciones definidas a trozos.

Ejercicios

1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 1}{2x^2 - x}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{x}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ (pista: multiplica por $1 + \cos x$)

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$

6. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

La derivada: el concepto

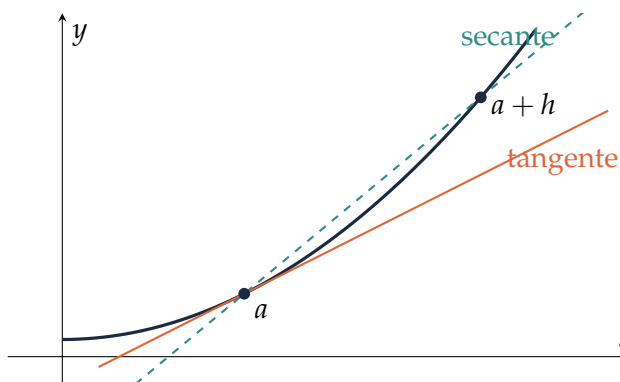


2.1 Pendiente de una curva

La pendiente de la recta que pasa por $(a, f(a))$ y $(a + h, f(a + h))$ es

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Si acercamos el segundo punto al primero ($h \rightarrow 0$), la recta secante se convierte en la **recta tangente**.



Definición (derivada)

La derivada de f en a es

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h},$$

si el límite existe. En ese caso decimos que f es **derivable** en a .

Notaciones equivalentes: $f'(x)$, $\frac{df}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$, y' , $D_x f$.

2.2 Interpretaciones

- **Geométrica:** $f'(a)$ es la pendiente de la tangente. La recta tangente es

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

- **Física:** si $s(t)$ es la posición, $s'(t)$ es la velocidad y $s''(t)$ la aceleración.
- **General:** $f'(a)$ es la tasa de cambio instantánea de f : cuánto cambia f por cada unidad que cambia x , justo en a .

Ejemplo: derivada por definición

Sea $f(x) = x^2$.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x.$$

Ejemplo: recta tangente

Tangente a $y = x^2$ en $x = 3$: $f(3) = 9$, $f'(3) = 6$, así que $y = 9 + 6(x - 3)$, es decir, $y = 6x - 9$.

2.3 Derivable implica continua

Teorema

Si f es derivable en a , entonces es continua en a . El recíproco es falso.

El contraejemplo clásico es $f(x) = |x|$ en $x = 0$: es continua, pero tiene un pico. Por la derecha la pendiente es 1 y por la izquierda -1 , así que el límite de la definición no existe.

Ejercicios

1. Usando la definición, calcula $f'(3)$ para $f(x) = x^2$.
2. Usando la definición, deriva $f(x) = 1/x$.
3. Halla la recta tangente a $y = x^3$ en $x = 1$.
4. Usando la definición, deriva $f(x) = \sqrt{x}$.
5. Un objeto cae según $s(t) = 4,9 t^2$ (metros). ¿Qué velocidad lleva a los 2 segundos?
6. Explica con los límites laterales por qué $|x|$ no es derivable en 0.

Reglas de derivación



Calcular derivadas por la definición es lento. Por suerte, unas pocas reglas bastan para derivar cualquier función elemental.

3.1 Derivadas básicas

Teorema (tabla esencial)

$$(c)' = 0$$

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$(\operatorname{arccos} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

La regla de la potencia vale para cualquier exponente real: $(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

3.2 Reglas de operación

Teorema (álgebra de derivadas)

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(c f)' = c f'$$

$$(f g)' = f' g + f g'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' g - f g'}{g^2}$$

Ejemplo: suma y potencias

$$\left(4x^3 - \frac{2}{x} + \sqrt[3]{x}\right)' = (4x^3 - 2x^{-1} + x^{1/3})' = 12x^2 + 2x^{-2} + \frac{1}{3}x^{-2/3}.$$

Ejemplo: producto

$$(x^3 \sen x)' = 3x^2 \sen x + x^3 \cos x.$$

Ejemplo: cociente

$$\left(\frac{x^2}{x+1}\right)' = \frac{2x(x+1) - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}.$$

Truco. En el cociente, el orden importa: “la de arriba derivada por la de abajo, menos la de arriba por la de abajo derivada, entre la de abajo al cuadrado”. Antes de usarla, mira si puedes evitarla: $\frac{x^3 + 1}{x} = x^2 + x^{-1}$ se deriva sin cociente.

3.3 Derivadas de orden superior

La derivada de f' es la segunda derivada f'' , y así sucesivamente. Por ejemplo, si $f(x) = x^4$: $f' = 4x^3$, $f'' = 12x^2$, $f''' = 24x$, $f^{(4)} = 24$, $f^{(5)} = 0$.

Ejercicios

Deriva:

1. $5x^4 - 3x^2 + 7x - 2$

2. $3\sqrt{x} + \frac{2}{x^3}$

3. $x^2 e^x$

4. $x \ln x$

5. $\frac{x+1}{x-1}$

6. $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

7. $e^x \operatorname{sen} x$

8. Tercera derivada de $\operatorname{sen} x$

Regla de la cadena y derivación implícita



4.1 La regla de la cadena

Casi todas las funciones reales son *composiciones*: $\text{sen}(x^2)$ es “seno de algo”, donde ese algo es x^2 .

Teorema (regla de la cadena)

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \text{o bien} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

En palabras: *deriva la de fuera dejando dentro lo mismo, y multiplica por la derivada de lo de dentro.*

Ejemplo

$$\begin{aligned} ((x^2 + 1)^7)' &= 7(x^2 + 1)^6 \cdot 2x = 14x(x^2 + 1)^6 \\ (\text{sen}(5x))' &= \cos(5x) \cdot 5 \\ (e^{\text{sen } x})' &= e^{\text{sen } x} \cos x \\ (\ln(\cos x))' &= \frac{1}{\cos x} \cdot (-\text{sen } x) = -\text{tg } x \end{aligned}$$

Con varias capas, se aplica una vez por capa:

$$(\text{sen}^3(2x))' = 3 \text{sen}^2(2x) \cdot \cos(2x) \cdot 2 = 6 \text{sen}^2(2x) \cos(2x).$$

Teorema (formas generalizadas)

$$\text{Si } u = u(x): \quad (u^n)' = nu^{n-1}u', \quad (e^u)' = e^uu', \quad (\ln u)' = \frac{u'}{u}, \quad (\operatorname{sen} u)' = u' \cos u, \quad (\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}.$$

4.2 Derivación implícita

A veces y no está despejada, como en la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$. Derivamos ambos lados respecto de x , recordando que y depende de x (cadena: $(y^2)' = 2y y'$):

$$2x + 2y y' = 0 \implies y' = -\frac{x}{y}.$$

En el punto $(3, 4)$ la pendiente es $-3/4$.

Ejemplo

$$x^3 + y^3 = 6xy. \text{ Derivando: } 3x^2 + 3y^2 y' = 6y + 6xy', \text{ luego } y'(3y^2 - 6x) = 6y - 3x^2 \text{ y } y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}.$$

4.3 Derivación logarítmica

Para funciones del tipo $f(x)^{g(x)}$ o productos largos, toma logaritmos antes de derivar.

Ejemplo: $y = x^{\operatorname{sen} x}$

$$\ln y = \operatorname{sen} x \ln x. \text{ Derivando: } \frac{y'}{y} = \cos x \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x}, \text{ así que}$$

$$y' = x^{\operatorname{sen} x} \left(\cos x \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right).$$

4.4 Derivada de la función inversa

Si $g = f^{-1}$, entonces $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$. Así se obtiene, por ejemplo, $(\operatorname{arctg} x)'$: si $y = \operatorname{arctg} x$, entonces $\operatorname{tg} y = x$, y derivando $(1 + \operatorname{tg}^2 y)y' = 1$, de donde $y' = \frac{1}{1 + x^2}$.

Ejercicios

1. $(3x^2 + 1)^5$

2. $\operatorname{sen}(x^3)$

3. e^{-x^2}

4. $\ln(x^2 + 1)$

5. y' si $x^2 + y^2 = 25$

6. x^x

7. $\operatorname{arctg}(2x)$

8. $\sqrt{1 + \operatorname{sen} x}$

Aplicaciones de la derivada



5.1 Crecimiento y extremos

Teorema

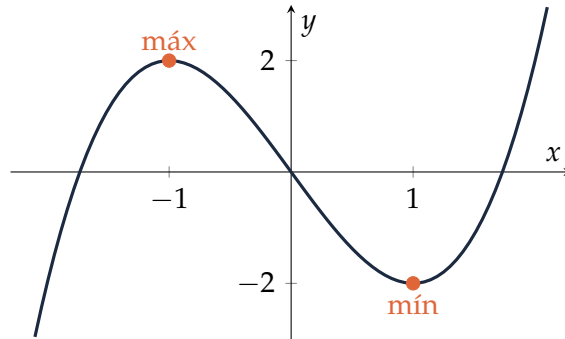
Si $f' > 0$ en un intervalo, f crece en él; si $f' < 0$, decrece. Si f tiene un máximo o mínimo local en a y es derivable allí, entonces $f'(a) = 0$.

Los puntos donde $f' = 0$ (o f' no existe) se llaman **puntos críticos**. Para clasificarlos:

- **Criterio de la primera derivada:** si f' pasa de $+$ a $-$, máximo; de $-$ a $+$, mínimo.
- **Criterio de la segunda derivada:** si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$, máximo; si $f''(a) > 0$, mínimo.

Ejemplo

$f(x) = x^3 - 3x$. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$, críticos en $x = \pm 1$.
 $f''(x) = 6x$: $f''(-1) = -6 < 0$ (máximo local, $f(-1) = 2$) y $f''(1) = 6 > 0$ (mínimo local, $f(1) = -2$).



5.2 Concavidad e inflexión

Si $f'' > 0$ la curva es **convexa** (forma de $\cup$); si $f'' < 0$ es **cóncava** ($\cap$). Un punto donde f'' cambia de signo es un **punto de inflexión**.

5.3 Optimización

Método: (1) dibuja y nombra variables; (2) escribe la cantidad a optimizar en función de *una* variable usando las restricciones; (3) deriva e iguala a cero; (4) comprueba que es máximo o mínimo y que está en el dominio.

Ejemplo: lata de mínimo material

Una lata cilíndrica debe contener $V \text{ cm}^3$. ¿Qué proporciones minimizan la superficie? $V = \pi r^2 h \Rightarrow h = V/(\pi r^2)$, y

$$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

$S'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0 \Rightarrow r^3 = \frac{V}{2\pi}$. Entonces $h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{2\pi r^3}{\pi r^2} = 2r$: la altura óptima es igual al diámetro.

5.4 Tasas relacionadas

Si dos magnitudes ligadas por una ecuación cambian con el tiempo, derivamos la ecuación respecto de t .

Ejemplo

Se infla un globo esférico a $100 \text{ cm}^3/\text{s}$. ¿A qué velocidad crece el radio cuando $r = 5 \text{ cm}$? $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$, luego $\frac{dr}{dt} = \frac{100}{4\pi \cdot 25} = \frac{1}{\pi} \approx 0,32 \text{ cm/s}$.

5.5 Regla de L'Hôpital**Teorema (L'Hôpital)**

Si $\lim f/g$ da $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, si este último existe.

Ejemplo

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = 0$. Se puede aplicar varias veces: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0$.

Truco. Las formas $0 \cdot \infty$ se convierten en cociente ($x \ln x = \frac{\ln x}{1/x}$), y las de tipo 1^∞ , 0^0 o ∞^0 se resuelven tomando logaritmos.

5.6 Aproximación lineal

Cerca de a : $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$. Por ejemplo, $\sqrt{4,1} \approx 2 + \frac{1}{4}(0,1) = 2,025$ (el valor real es $2,02485\dots$).

Ejercicios

1. Halla y clasifica los extremos locales de $f(x) = x^3 - 3x$.
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$
3. De todos los rectángulos de perímetro 40, ¿cuál tiene área máxima?
4. De una lámina de 12×12 cm se cortan cuadrados de lado x en las esquinas para hacer una caja sin tapa. ¿Qué x maximiza el volumen y cuál es ese volumen?
5. Halla los puntos de inflexión de $f(x) = x^4 - 4x^3$.
6. El radio de un círculo crece a 2 cm/s. ¿A qué ritmo crece el área cuando $r = 5$ cm?
7. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$

La integral indefinida



6.1 Antiderivadas

Definición

F es una **primitiva** (o antiderivada) de f si $F' = f$. El conjunto de todas ellas se escribe

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

donde C es una constante arbitraria.

Integrar es derivar al revés. Por eso *siempre* puedes comprobar una integral derivando el resultado.

6.2 Tabla de integrales inmediatas

Teorema (integrales inmediatas)

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

6.3 Linealidad

$\int (af + bg) dx = a \int f dx + b \int g dx$. Es decir, la integral reparte sobre sumas y saca constantes. **No** reparte sobre productos ni cocientes.

Ejemplo

$$\int \left(6x^2 - \frac{3}{x} + 4e^x \right) dx = 2x^3 - 3 \ln |x| + 4e^x + C.$$

Ejemplo: reescribir primero

$$\int \frac{x^3 + 2\sqrt{x}}{x} dx = \int (x^2 + 2x^{-1/2}) dx = \frac{x^3}{3} + 4\sqrt{x} + C.$$

Ejercicios

1. $\int (3x^2 - 4x + 5) dx$

4. $\int (2 \sin x - 3 \cos x) dx$

2. $\int \left(\frac{1}{x} + e^x \right) dx$

5. $\int \frac{dx}{1+x^2}$

3. $\int \sqrt{x} dx$

6. $\int \frac{x^2+1}{x} dx$

Técnicas de integración



7.1 Cambio de variable (sustitución)

Es la regla de la cadena al revés. Si ves una función y *su derivada* multiplicando, sustituye.

Teorema

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du, \text{ con } u = g(x), du = g'(x) dx.$$

Ejemplo

$$\int x \cos(x^2) dx. \text{ Con } u = x^2, du = 2x dx: \frac{1}{2} \int \cos u du = \frac{1}{2} \sin(x^2) + C.$$

Ejemplo: forma u' / u

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+3} dx = \ln|x^2+x+3| + C, \text{ porque el numerador es la derivada del denominador.}$$

7.2 Integración por partes

Es la regla del producto al revés.

Teorema (por partes)

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du.$$

Truco. Elige u según el orden **ALPES**: Arcos (inversas trigonométricas), Logaritmos, Polinomios, Exponenciales, Senos y cosenos. La que aparezca antes en la lista es u ; el resto es dv .

Ejemplo

$\int x \cos x \, dx$: $u = x$, $dv = \cos x \, dx$, luego $du = dx$, $v = \sin x$:

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C.$$

Ejemplo: integral cíclica

$I = \int e^x \cos x \, dx$. Partes dos veces ($u = \cos x$, luego $u = \sin x$): $I = e^x \cos x + e^x \sin x - I$, así que $I = \frac{e^x(\sin x + \cos x)}{2} + C$.

7.3 Integrales trigonométricas

Identidades clave:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

- **Potencia impar** de seno o coseno: separa un factor y pasa el resto con $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
- **Potencias pares**: usa las fórmulas del ángulo doble.

Ejemplo

$$\int \cos^3 x \, dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx \stackrel{u=\sin x}{=} \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

7.4 Sustitución trigonométrica

Si aparece	Sustituye	Porque
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \operatorname{sen} t$	$a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 t = a^2 \cos^2 t$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \operatorname{tg} t$	$a^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 t = a^2 / \cos^2 t$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a / \cos t$	$a^2 / \cos^2 t - a^2 = a^2 \operatorname{tg}^2 t$

Ejemplo: área del círculo

$\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$ con $x = r \operatorname{sen} t$: $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos^2 t dt = r^2 \cdot \frac{\pi}{2}$. Es el área de medio círculo, luego el círculo entero mide πr^2 .

7.5 Fracciones parciales

Para integrar $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (con grado de P menor que el de Q ; si no, divide primero), descompón:

$$\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}, \quad \frac{P(x)}{(x-a)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2}.$$

Ejemplo

$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$. Multiplicando: $1 = A(x+1) + Bx$. Con $x = 0$: $A = 1$; con $x = -1$: $B = -1$.

$$\int \frac{dx}{x(x+1)} = \ln|x| - \ln|x+1| + C = \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + C.$$

Ejercicios**Sustitución**

1. $\int 2x(x^2 + 1)^5 dx$

3. $\int x e^{x^2} dx$

2. $\int \cos(3x) dx$

4. $\int \operatorname{tg} x dx$

Por partes

4. $\int x e^x dx$

6. $\int x^2 \operatorname{sen} x dx$

5. $\int \ln x dx$

7. $\int e^x \operatorname{sen} x dx$

Trigonómicas

4. $\int \operatorname{sen}^2 x dx$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

5. $\int \operatorname{sen}^3 x dx$

7. $\int \sqrt{1-x^2} dx$

Fracciones parciales

4. $\int \frac{dx}{x^2 - 1}$

5. $\int \frac{3x + 5}{(x + 1)(x + 2)} dx$

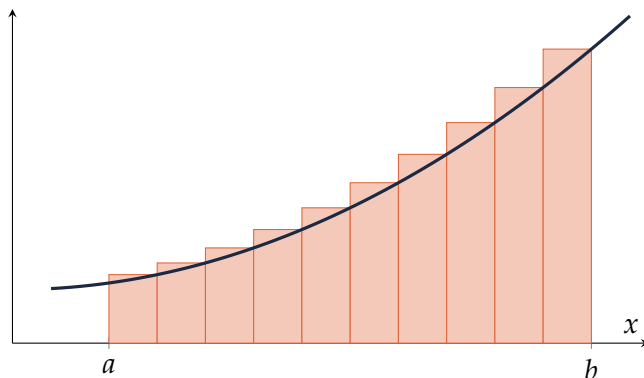
La integral definida



8.1 Área bajo una curva: sumas de Riemann

Dividimos $[a, b]$ en n trozos de anchura $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ y sumamos rectángulos:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x.$$



La integral definida es un **número**: el área *con signo* (lo que queda bajo el eje x cuenta negativo).

Teorema (propiedades)

- $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$, $\int_a^b c f = c \int_a^b f$.
- $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$, $\int_a^a f = 0$, $\int_b^a f = -\int_a^b f$.

- Si f es impar, $\int_{-a}^a f = 0$; si es par, $\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$.

8.2 El Teorema Fundamental del Cálculo

Este es el resultado que une las dos mitades del libro.

Teorema (TFC, primera parte)

Si f es continua, la función $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ es derivable y $F'(x) = f(x)$.

Teorema (TFC, segunda parte — regla de Barrow)

Si F es una primitiva de f en $[a, b]$,

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Así, calcular un área (un límite de sumas infinitas) se reduce a encontrar una primitiva.

Ejemplo

$$\int_1^3 (2x + 1) dx = [x^2 + x]_1^3 = (9 + 3) - (1 + 1) = 10.$$

Ejemplo: cambio de variable con límites

$$\int_0^2 x e^{x^2} dx. \text{ Con } u = x^2: \text{ si } x = 0, u = 0; \text{ si } x = 2, u = 4. \quad \frac{1}{2} \int_0^4 e^u du = \frac{e^4 - 1}{2}.$$

Ejemplo: derivar una integral

Combinando TFC y cadena: $\frac{d}{dx} \int_0^{g(x)} f(t) dt = f(g(x)) g'(x)$. Por ejemplo $\frac{d}{dx} \int_1^{x^3} \ln t dt = \ln(x^3) \cdot 3x^2 = 9x^2 \ln x$.

8.3 Valor medio de una función

El valor medio de f en $[a, b]$ es $\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

Ejercicios

1. $\int_0^2 x^2 dx$

2. $\int_0^\pi \sin x dx$

3. $\int_1^e \frac{1}{x} dx$

4. $\int_0^1 x e^x dx$

5. $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \cos t dt$

6. Calcula $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n}$ interpretándolo como una integral.

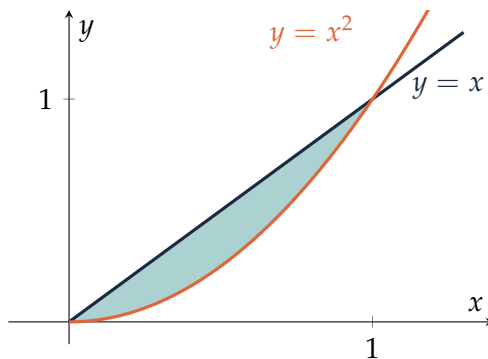
7. Valor medio de $\sin x$ en $[0, \pi]$.

Aplicaciones de la integral



9.1 Área entre curvas

Si $f \geq g$ en $[a, b]$: $A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$ ("la de arriba menos la de abajo").



Para hallar a y b , resuelve $f(x) = g(x)$. Si las curvas se cruzan dentro del intervalo, divide en trozos.

9.2 Volúmenes de revolución

Teorema (discos y capas)

Girando $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$:

- alrededor del eje x (**discos**): $V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$;
- alrededor del eje y (**capas cilíndricas**): $V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$.

Ejemplo: volumen del cono

Girando $y = \frac{r}{h}x$, $0 \leq x \leq h$, alrededor del eje x : $V = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} x^2 dx = \pi \frac{r^2}{h^2} \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.

9.3 Longitud de arco

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

9.4 Aplicaciones físicas

- **Trabajo** de una fuerza variable: $W = \int_a^b F(x) dx$. Para un muelle, $F = kx$ (ley de Hooke).
- **Distancia recorrida** a partir de la velocidad: $d = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)| dt$.
- **Centro de masas** de una región: $\bar{x} = \frac{1}{A} \int_a^b x(f - g) dx$.

Ejemplo

Un coche acelera con $v(t) = 3t^2$ m/s. Distancia en los primeros 4 s: $\int_0^4 3t^2 dt = [t^3]_0^4 = 64$ m.

Ejercicios

1. Área entre $y = x$ e $y = x^2$.
2. Área encerrada por $y = 4 - x^2$ y el eje x .
3. Volumen al girar $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$, alrededor del eje x .
4. Deduce el volumen de una esfera de radio r girando $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.
5. Longitud de $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$ entre $x = 0$ y $x = 3$.
6. Trabajo para estirar 0,2 m un muelle de constante $k = 50$ N/m.
7. Volumen al girar la región bajo $y = x - x^2$ ($0 \leq x \leq 1$) alrededor del eje y .

Integrales impropias y series de Taylor



10.1 Integrales impropias

Cuando el intervalo es infinito o la función se dispara, definimos la integral como un límite.

Definición

$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$. Si el límite es finito, la integral **converge**; si no, **diverge**. Análogamente si f no está acotada en un extremo.

Teorema (integrales p)

$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ converge si y solo si $p > 1$. $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ converge si y solo si $p < 1$.

Ejemplo

$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{b} \right) = 1$. Un área infinitamente larga, pero finita.

Ejemplo: la función Gamma

Integrando por partes se prueba que $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$, y por tanto $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$. Esta integral define $\Gamma(n+1) = n!$ y extiende el factorial a números no enteros.

10.2 Polinomios y series de Taylor

Toda función “buena” se puede aproximar cerca de a por un polinomio cuyas derivadas coinciden con las de f :

Teorema (Taylor)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots$$

Con $a = 0$ se llama serie de **Maclaurin**.

Teorema (series que hay que saberse)

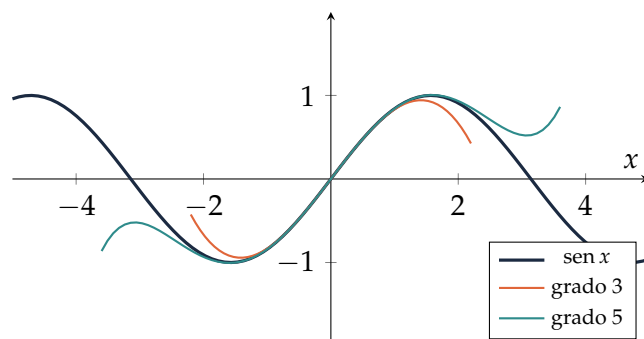
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (\text{todo } x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad (\text{todo } x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \quad (\text{todo } x)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (|x| < 1)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad (-1 < x \leq 1)$$



Las series permiten derivar e integrar término a término, calcular límites difíciles y aproximar integrales que no tienen primitiva elemental.

Ejemplo: una integral sin primitiva elemental

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \dots \right) dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \dots \approx 0,7468.$$

Ejemplo: la fórmula de Euler

Sustituyendo $x = i\theta$ en la serie de e^x y separando parte real e imaginaria: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. Con $\theta = \pi$ se obtiene $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Ejercicios

1. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$
2. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$
3. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$
4. $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$
5. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$
6. Escribe la serie de Maclaurin de e^{x^2} .
7. Usa series para calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x - x}{x^3}$.
8. Calcula $\int_0^{\infty} x^5 e^{-x} dx$.

Más allá: varias variables y ecuaciones diferenciales



11.1 Derivadas parciales

Si $f(x, y)$ depende de dos variables, la **derivada parcial** $\frac{\partial f}{\partial x}$ se calcula derivando respecto de x y tratando y como constante (y viceversa).

Ejemplo

$$f(x, y) = x^3y^2 + e^{xy}: \quad f_x = 3x^2y^2 + ye^{xy}, \quad f_y = 2x^3y + xe^{xy}.$$

Definición (gradiente)

$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$. Apunta en la dirección de máximo crecimiento de f y su módulo es esa tasa máxima.

Los extremos de $f(x, y)$ están donde $\nabla f = (0, 0)$. Para clasificarlos se usa el hessiano $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$: si $D > 0$ y $f_{xx} > 0$, mínimo; si $D > 0$ y $f_{xx} < 0$, máximo; si $D < 0$, punto de silla.

11.2 Integrales dobles

$\iint_R f(x, y) dA$ es el volumen bajo la superficie $z = f(x, y)$ sobre la región R . Se calcula como integrales iteradas (teorema de Fubini):

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Ejemplo: región no rectangular

Sobre el triángulo $0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1$: $\int_0^1 \int_0^x xy dy dx = \int_0^1 \frac{x^3}{2} dx = \frac{1}{8}$.

11.2.1 Coordenadas polares

Con $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, el elemento de área es $dA = r dr d\theta$. Ideal para círculos.

Ejemplo: la integral de Gauss

Sea $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$. Entonces

$$I^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi,$$

así que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. Es la base de la campana de Gauss en estadística.

11.3 Ecuaciones diferenciales

Una **ecuación diferencial** relaciona una función con sus derivadas. Resolverla es encontrar la función.

11.3.1 Variables separables

Si $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$, separa e integra: $\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x) dx$.

Ejemplo: crecimiento exponencial

$y' = ky$: $\int \frac{dy}{y} = \int k dx \Rightarrow \ln |y| = kx + c \Rightarrow y = Ce^{kx}$. Modela poblaciones, interés compuesto ($k > 0$) y desintegración radiactiva ($k < 0$).

11.3.2 Lineales de primer orden

$y' + p(x)y = q(x)$. Se multiplica por el **factor integrante** $\mu = e^{\int p dx}$; entonces $(\mu y)' = \mu q$ y basta integrar.

Ejemplo

$y' + y = x$: $\mu = e^x$, $(e^x y)' = xe^x$, $e^x y = e^x(x - 1) + C$, luego $y = x - 1 + Ce^{-x}$.

11.3.3 Lineales de segundo orden con coeficientes constantes

Para $ay'' + by' + cy = 0$, prueba $y = e^{rx}$: se obtiene la **ecuación característica** $ar^2 + br + c = 0$.

- Dos raíces reales $r_1 \neq r_2$: $y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$.
- Raíz doble r : $y = (A + Bx)e^{rx}$.
- Complejas $\alpha \pm \beta i$: $y = e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x)$.

Ejemplo: el oscilador armónico

$y'' + \omega^2 y = 0$ tiene $r = \pm \omega i$, así que $y = A \cos \omega x + B \sin \omega x$: el movimiento de un muelle o un péndulo pequeño.

Ejercicios

1. Calcula f_x y f_y para $f(x, y) = x^2y + \sin(xy)$.
2. Gradiente de $f(x, y) = x^2 + y^2$ en $(1, 2)$.
3. $\int_0^1 \int_0^2 (x + y) dy dx$
4. Usa coordenadas polares para demostrar que el área de un círculo de radio R es πR^2 .
5. Resuelve $y' = 2xy$ con $y(0) = 1$.
6. Resuelve $y'' - 3y' + 2y = 0$.
7. Resuelve $y'' + y = 0$.

¡Nivel 100 alcanzado!

Ya dominas el cálculo de una variable y tienes la base para el cálculo vectorial, las ecuaciones diferenciales y el análisis.

Formulario de derivadas

Función	Derivada	Función	Derivada
c	0	u^n	$n u^{n-1} u'$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
e^u	$e^u u'$	a^u	$a^u \ln a u'$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$	$\log_a u$	$\frac{u'}{u \ln a}$
$\operatorname{sen} u$	$u' \cos u$	$\cos u$	$-u' \operatorname{sen} u$
$\operatorname{tg} u$	$\frac{u'}{\cos^2 u}$	$\operatorname{cotg} u$	$-\frac{u'}{\operatorname{sen}^2 u}$
$\operatorname{arcsen} u$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\arccos u$	$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\operatorname{arctg} u$	$\frac{u'}{1+u^2}$	u^v	$u^v \left(v' \ln u + \frac{v u'}{u} \right)$
$u v$	$u' v + u v'$	$\frac{u}{v}$	$\frac{u' v - u v'}{v^2}$

Formulario de integrales

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$
$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$\int \operatorname{sen} ax dx = -\frac{\cos ax}{a} + C$	$\int \cos ax dx = \frac{\operatorname{sen} ax}{a} + C$
$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + C$
$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + C$
$\int \ln x dx = x \ln x - x + C$	$\int x e^x dx = e^x (x - 1) + C$
$\int \operatorname{sen}^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$	$\int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$
$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + C$	$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

Métodos, de un vistazo

- ¿Aparece una función y su derivada? → **sustitución**.
- ¿Producto de dos tipos distintos (polinomio por exponencial, logaritmo...)? → **por partes** (ALPES).
- ¿Cociente de polinomios? → divide si hace falta y usa **fracciones parciales**.
- ¿Potencias de seno y coseno? → identidades **trigonométricas**.
- ¿Raíz de $a^2 \pm x^2$ o $x^2 - a^2$? → **sustitución trigonométrica**.

Soluciones de los ejercicios

Capítulo 1

1. 6 (factoriza $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$).
2. $3/2$.
3. 5.
4. $1/2$: $\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1 + \cos x)} \rightarrow \frac{1}{2}$.
5. e^2 : $(1 + \frac{2}{x})^x = [(1 + \frac{2}{x})^{x/2}]^2 \rightarrow e^2$.
6. $1/4$: $\frac{\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \rightarrow \frac{1}{4}$.

Capítulo 2

1. $f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6 + h) = 6$.
2. $\frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{-1}{x(x+h)} \rightarrow -\frac{1}{x^2}$.
3. $f(1) = 1, f'(1) = 3$: $y = 3x - 2$.
4. Racionalizando: $\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
5. $s'(t) = 9,8t$, luego $s'(2) = 19,6$ m/s.
6. $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$ y $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$; los límites laterales difieren.

Capítulo 3

1. $20x^3 - 6x + 7$

2. $\frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{6}{x^4}$
3. $e^x(x^2 + 2x)$
4. $\ln x + 1$
5. $-\frac{2}{(x-1)^2}$
6. $\frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$
7. $e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)$
8. $-\cos x$

Capítulo 4

1. $30x(3x^2 + 1)^4$
2. $3x^2 \cos(x^3)$
3. $-2x e^{-x^2}$
4. $\frac{2x}{x^2 + 1}$
5. $y' = -x/y$
6. $x^x(\ln x + 1)$
7. $\frac{2}{1 + 4x^2}$
8. $\frac{\cos x}{2\sqrt{1 + \operatorname{sen} x}}$

Capítulo 5

1. Máximo local en $(-1, 2)$, mínimo local en $(1, -2)$.
2. $1/2$ (L'Hôpital dos veces).
3. El cuadrado de lado 10; área 100.
4. $V(x) = x(12 - 2x)^2$, $V'(x) = (12 - 2x)(12 - 6x) = 0 \Rightarrow x = 2$ cm; $V = 128$ cm³.
5. $f''(x) = 12x(x - 2)$ cambia de signo en $x = 0$ y $x = 2$: inflexión en $(0, 0)$ y $(2, -16)$.
6. $\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt} = 20\pi$ cm²/s.

$$7. 0: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0.$$

Capítulo 6

1. $x^3 - 2x^2 + 5x + C$
2. $\ln |x| + e^x + C$
3. $\frac{2}{3}x^{3/2} + C$
4. $-2 \cos x - 3 \operatorname{sen} x + C$
5. $\operatorname{arctg} x + C$
6. $\frac{x^2}{2} + \ln |x| + C$

Capítulo 7

1. $\frac{(x^2 + 1)^6}{6} + C$
2. $\frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + C$
3. $\frac{e^{x^2}}{2} + C$
4. $-\ln |\cos x| + C$
5. $e^x(x - 1) + C$
6. $x \ln x - x + C$
7. $-x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + C$
8. $\frac{e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)}{2} + C$
9. $\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$
10. $-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$
11. $\operatorname{arcsen} \frac{x}{2} + C$
12. $\frac{x\sqrt{1-x^2} + \operatorname{arcsen} x}{2} + C$
13. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$

14. $2 \ln |x + 1| + \ln |x + 2| + C$

Capítulo 8

1. $8/3$

2. 2

3. 1

4. 1: $[e^x(x-1)]_0^1 = 0 - (-1).$

5. $2x \cos(x^2)$

6. $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$

7. $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{sen} x dx = \frac{2}{\pi}$

Capítulo 9

1. $\int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{1}{6}$

2. $\int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \frac{32}{3}$

3. $\pi \int_0^4 x dx = 8\pi$

4. $\pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left(2r^3 - \frac{2r^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi r^3$

5. $\int_0^3 \sqrt{1+x} dx = \frac{2}{3} [(1+x)^{3/2}]_0^3 = \frac{14}{3}$

6. $W = \int_0^{0.2} 50x dx = 1 \text{ J}$

7. $2\pi \int_0^1 x(x - x^2) dx = 2\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{6}$

Capítulo 10

1. 1

2. Diverge: $\lim_{b \rightarrow \infty} \ln b = \infty.$

3. 2

4. 1

5. $\pi: [\operatorname{arctg} x]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}).$

6. $e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \dots$

7. $\frac{(x - x^3/6 + \dots) - x}{x^3} \rightarrow -\frac{1}{6}$

8. $5! = 120$

Capítulo 11

1. $f_x = 2xy + y \cos(xy), \quad f_y = x^2 + x \cos(xy)$

2. $\nabla f = (2x, 2y) = (2, 4)$

3. $\int_0^1 (2x + 2) dx = 3$

4. $\int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta = 2\pi \cdot \frac{R^2}{2} = \pi R^2$

5. $\frac{dy}{y} = 2x dx \Rightarrow y = Ce^{x^2}; \text{ con } y(0) = 1: y = e^{x^2}$

6. $r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow r = 1, 2: y = Ae^x + Be^{2x}$

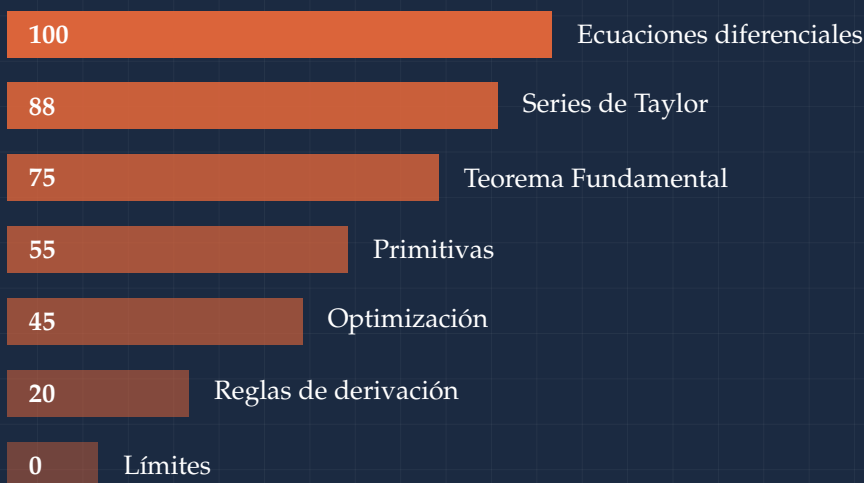
7. $r = \pm i: y = A \cos x + B \operatorname{sen} x$

De 0 a 100, sin saltos.

Este libro recorre el cálculo diferencial e integral completo en once capítulos, cada uno un escalón más alto que el anterior. Empieza por la idea de límite, construye la derivada desde su definición y la convierte en una herramienta para optimizar, aproximar y medir cambios. Después da la vuelta al problema: la integral, sus técnicas y el Teorema Fundamental que une ambos mundos.

El último tramo abre la puerta a las integrales impropias, las series de Taylor, las derivadas parciales, las integrales dobles y las ecuaciones diferenciales.

Incluye: explicaciones paso a paso, ejemplos resueltos, trucos y errores típicos, más de 80 ejercicios con todas las soluciones, y formularios completos de derivadas e integrales.



$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$