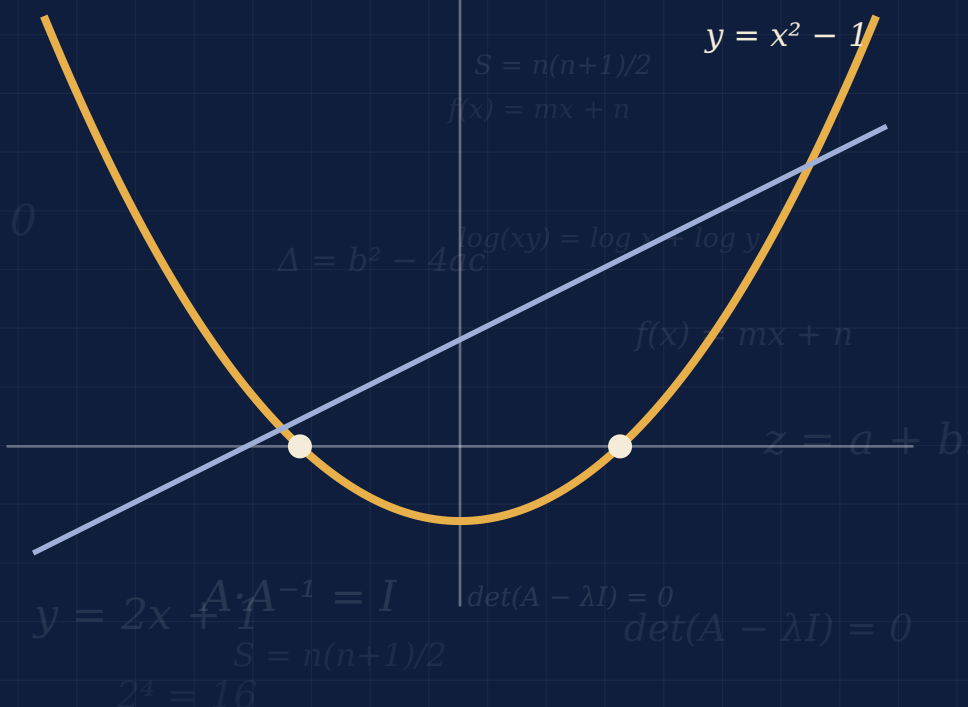


DEL PRIMER NÚMERO A LAS ESTRUCTURAS ABSTRACTAS

ÁLGEBRA

de 0 a 100

Un recorrido completo, paso a paso



0-25
Fundamentos

25-50
Elemental

50-75
Intermedia

75-100
Superior

Marlon Falcón Hernández

Edición 2026 · Valencia

Álgebra de 0 a 100

Oct 31, 2026 · @generame una imagen de 3 arquitectos estilo pizaso

Portada

ÁLGEBRA DE 0 A 100

Del primer número a las estructuras abstractas: un recorrido completo, paso a paso

Marlon Falcón Hernández

Edición 2026 · Valencia

«El álgebra es generosa: a menudo da más de lo que se le pide.» — Jean le Rond d'Alembert

Prólogo

Este libro te lleva desde sumar números enteros hasta entender qué es un grupo, un anillo o un espacio vectorial. No necesitas saber nada previo: solo lápiz, papel y constancia.

El álgebra es el arte de razonar con lo desconocido. En lugar de trabajar con un número concreto, le ponemos un nombre (x , y , $a \dots$) y operamos con él como si lo conociéramos. Esa idea sencilla sostiene la física, la economía, la informática y la ingeniería.

Cómo usar este libro

1. Lee cada capítulo en orden: cada uno se apoya en el anterior.
2. Rehaz los ejemplos resueltos tapando la solución.
3. Haz los ejercicios al final de cada capítulo antes de mirar las soluciones.
4. Si un capítulo se atasca, vuelve al anterior: casi siempre falta una base.

Niveles

Nivel	Capítulos	Equivale a
0-25 · Fundamentos	1-3	Primaria y primer ciclo de ESO

Nivel	Capítulos	Equivale a
25–50 · Álgebra elemental	4–8	ESO
50–75 · Álgebra intermedia	9–13	Bachillerato
75–100 · Álgebra superior	14–16	Primeros cursos universitarios

Índice

1. Números y operaciones
 2. Fracciones, potencias y raíces
 3. Lenguaje algebraico y expresiones
 4. Ecuaciones lineales
 5. Inecuaciones y valor absoluto
 6. Sistemas de ecuaciones
 7. Polinomios y productos notables
 8. Factorización y fracciones algebraicas
 9. Ecuaciones cuadráticas
 10. Funciones
 11. Exponenciales y logaritmos
 12. Sucesiones, series e inducción
 13. Números complejos
 14. Matrices y determinantes
 15. Espacios vectoriales y transformaciones lineales
 16. Estructuras algebraicas: grupos, anillos y cuerpos
- Soluciones a los ejercicios

Capítulo 1 · Números y operaciones

Todo el álgebra descansa sobre los números y cuatro operaciones. Dominar sus reglas evita el 80 % de los errores posteriores.

1.1 Los conjuntos numéricos

Cada conjunto amplía al anterior para resolver una operación que antes no tenía respuesta.

Conjunto	Símbolo	Ejemplos	Por qué aparece
Naturales	$\mathbb{N}$	0, 1, 2, 3...	Contar
Enteros	$\mathbb{Z}$	-3, 0, 7	Restar siempre ($3 - 5 = -2$)
Racionales	$\mathbb{Q}$	$1/2$, -0,75, 0,333...	Dividir siempre (salvo entre 0)
Irracionales	$\mathbb{I}$	$\sqrt{2}$, π , e	Longitudes que no son fracciones
Reales	$\mathbb{R}$	Todos los anteriores	La recta numérica completa
Complejos	$\mathbb{C}$	$3 + 2i$	Raíces de números negativos (cap. 13)

Se cumple: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

1.2 Reglas de los signos

Para multiplicar o dividir: signos iguales dan positivo; signos distintos dan negativo.

- $(+) \cdot (+) = +$, $(-) \cdot (-) = +$
- $(+) \cdot (-) = -$, $(-) \cdot (+) = -$

Para sumar enteros: con el mismo signo se suman los valores y se conserva el signo; con signos distintos se restan y se pone el signo del de mayor valor absoluto. Ejemplo: $-7 + 4 = -3$.

1.3 Jerarquía de operaciones

El orden es fijo y no admite excepciones:

1. Paréntesis y corchetes, de dentro hacia fuera.
2. Potencias y raíces.
3. Multiplicaciones y divisiones, de izquierda a derecha.
4. Sumas y restas, de izquierda a derecha.

Ejemplo resuelto. Calcula $3 + 4 \cdot (5 - 2)^2 \div 6$.

- Paréntesis: $5 - 2 = 3$

- Potencia: $3^2 = 9$
- Multiplicación y división: $4 \cdot 9 = 36$; $36 \div 6 = 6$
- Suma: $3 + 6 = 9$

1.4 Propiedades de las operaciones

Estas propiedades son las «reglas del juego» que permiten manipular expresiones algebraicas.

Propiedad	Suma	Producto
Conmutativa	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Asociativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Elemento neutro	$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$
Elemento opuesto / inverso	$a + (-a) = 0$	$a \cdot (1/a) = 1$, si $a \neq 0$

Y la más importante, la que conecta ambas:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{\texttt{(propiedad distributiva)}}$$

1.5 Divisibilidad: MCD y mcm

Un número primo solo es divisible entre 1 y él mismo (2, 3, 5, 7, 11...). Todo natural mayor que 1 se descompone de forma única en primos: $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$.

- **MCD** (máximo común divisor): factores comunes con el menor exponente.
- **mcm** (mínimo común múltiplo): todos los factores con el mayor exponente.

Ejemplo: $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ y $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$. $\text{MCD} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$; $\text{mcm} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$.

Ejercicios del capítulo 1

1. Calcula: $-8 + 3 - (-5) - 2$.
2. Calcula: $(-3) \cdot (-4) \cdot (-2)$.
3. Calcula: $20 - 3 \cdot [4 - (6 - 8)^2]$.
4. Clasifica cada número en el conjunto más pequeño al que pertenece: -4 , $0,25$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{5}$, $7/3$.
5. Halla el MCD y el mcm de 84 y 126.

Capítulo 2 · Fracciones, potencias y raíces

Las fracciones, las potencias y las raíces son las tres herramientas que más usarás al simplificar expresiones algebraicas.

2.1 Fracciones

Una fracción a/b indica a partes de un total dividido en b partes iguales ($b \neq 0$). Dos fracciones son equivalentes si $a \cdot d = b \cdot c$; por ejemplo, $2/3 = 8/12$.

Simplificar: se dividen numerador y denominador entre su MCD. $18/24 = 3/4$ (MCD = 6).

Operaciones:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

En la práctica, para sumar conviene usar el mcm de los denominadores.

Ejemplo resuelto. $5/6 + 3/4$. El $\text{mcm}(6, 4) = 12$, así que $10/12 + 9/12 = 19/12$.

2.2 Potencias

Una potencia a^n es multiplicar a por sí mismo n veces: $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$.

Regla	Fórmula	Ejemplo
Producto de igual base	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$2^3 \cdot 2^4 = 2^7$
Cociente de igual base	$a^m \div a^n = a^{m-n}$	$5^6 \div 5^2 = 5^4$
Potencia de potencia	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(3^2)^3 = 3^6$
Potencia de un producto	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(2x)^3 = 8x^3$
Exponente cero	$a^0 = 1$ ($a \neq 0$)	$7^0 = 1$
Exponente negativo	$a^{-n} = 1/a^n$	$2^{-3} = 1/8$

Cuidado con los signos: $(-2)^4 = 16$, pero $-2^4 = -16$, porque la potencia se calcula antes que el signo.

2.3 Notación científica

Un número se escribe como $a \cdot 10^n$ con $1 \leq |a| < 10$. La distancia Tierra-Sol, 150 000 000 km, es $1,5 \cdot 10^8$ km.

2.4 Raíces y exponentes fraccionarios

La raíz n -ésima de a es el número que elevado a n da a . Toda raíz se puede escribir como potencia:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

Así, $\sqrt{x} = x^{(1/2)}$ y la raíz cúbica de 8^2 es $8^{(2/3)} = 4$. Gracias a esto, las reglas de potencias sirven también para raíces.

Propiedades útiles (con $a, b \geq 0$): $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ y $\sqrt{a/b} = \sqrt{a} / \sqrt{b}$. Pero $\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$: $\sqrt{9 + 16} = 5$, no 7.

2.5 Racionalizar

Racionalizar es quitar raíces del denominador.

- Raíz simple: $6/\sqrt{3} = 6\sqrt{3}/3 = 2\sqrt{3}$.
- Binomio: se multiplica por el conjugado.

$$\frac{1}{\sqrt{5}-2} \cdot \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2} = \frac{\sqrt{5}+2}{5-4} = \sqrt{5}+2$$

Ejercicios del capítulo 2

1. Calcula y simplifica: $2/3 - 1/4 + 5/6$.
2. Calcula: $(3/5) \div (9/10)$.
3. Simplifica: $(x^3 \cdot x^{-5})^2 / x^{-6}$.
4. Escribe como potencia y calcula: la raíz cuarta de 16^3 .
5. Racionaliza: $4/(\sqrt{7} + \sqrt{3})$.

Capítulo 3 · Lenguaje algebraico y expresiones

Aquí empieza el álgebra propiamente dicha: usar letras para representar números que no conocemos o que pueden variar.

3.1 Traducir del lenguaje común al algebraico

Lenguaje común	Lenguaje algebraico
Un número cualquiera	x
El doble de un número	$2x$
Un número aumentado en 5	$x + 5$
La mitad de un número menos 3	$x/2 - 3$
El cuadrado de un número	x^2
Dos números consecutivos	$x, x + 1$
Un número par / impar	$2n / 2n + 1$
La edad de alguien dentro de 4 años	$x + 4$

3.2 Vocabulario básico

- **Variable:** letra que representa un número (x, y, t).
- **Coeficiente:** número que multiplica a la variable (en $7x^2$, el coeficiente es 7).
- **Término:** cada sumando de una expresión ($3x^2 - 5x + 2$ tiene tres términos).
- **Monomio:** expresión de un solo término, como $-4a^2b$.
- **Grado de un monomio:** suma de los exponentes de sus variables ($-4a^2b$ tiene grado 3).
- **Términos semejantes:** tienen exactamente la misma parte literal ($3x^2y$ y $-8x^2y$).

3.3 Valor numérico

Es el resultado de sustituir las variables por números. Usa siempre paréntesis al sustituir negativos.

Ejemplo resuelto. Valor de $2x^2 - 3xy + y$ para $x = -1, y = 2$:

$$2 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) \cdot 2 + 2 = 2 + 6 + 2 = 10.$$

3.4 Reducir términos semejantes

Solo se pueden sumar términos semejantes: se suman los coeficientes y se conserva la parte literal.

$$5x^2 + 3x - 2x^2 + 7 - x = 3x^2 + 2x + 7$$

No se pueden sumar x^2 y x : son tan distintos como «metros cuadrados» y «metros».

3.5 Quitar paréntesis

Un signo menos delante de un paréntesis cambia el signo de todo lo que hay dentro:

$$-(2a - 3b + 1) = -2a + 3b - 1$$

Un número delante multiplica cada término (propiedad distributiva):

Ejemplo resuelto. $3(2x - 4) - 2(x - 5) = 6x - 12 - 2x + 10 = 4x - 2.$

Ejercicios del capítulo 3

1. Traduce: «el triple de un número disminuido en 7 es igual a su mitad».
2. Indica coeficiente, parte literal y grado de: $-5x^3y^2$.
3. Calcula el valor numérico de $a^2 - 2ab + b^2$ para $a = 3$, $b = -2$.
4. Reduce: $4x^2 - 3x + 2 - x^2 + 5x - 9$.
5. Simplifica: $2(3a - b) - 4(a - 2b) + a$.

Capítulo 4 · Ecuaciones lineales

Una ecuación es una igualdad con al menos una incógnita; resolverla es encontrar los valores que la hacen cierta. Las de primer grado (lineales) tienen la forma $ax + b = 0$ y, si $a \neq 0$, una única solución $x = -b/a$.

4.1 La idea clave: la balanza

Una ecuación es una balanza en equilibrio. Si haces lo mismo en los dos lados (sumar, restar, multiplicar o dividir por un número distinto de cero), sigue en equilibrio. El objetivo es dejar la x sola en un lado.

4.2 Método general

1. Quitar paréntesis.
2. Quitar denominadores multiplicando todo por el mcm.
3. Pasar los términos con x a un lado y los números al otro.
4. Reducir términos semejantes.
5. Despejar x dividiendo entre su coeficiente.
6. Comprobar sustituyendo en la ecuación original.

Ejemplo resuelto 1. $5x - 7 = 2x + 8$

- $5x - 2x = 8 + 7 \rightarrow 3x = 15 \rightarrow x = 5$
- Comprobación: $5 \cdot 5 - 7 = 18$ y $2 \cdot 5 + 8 = 18$. Correcto.

Ejemplo resuelto 2. $(x - 1)/3 - (x + 2)/4 = 1$

- $\text{mcm}(3, 4) = 12$. Multiplicamos todo: $4(x - 1) - 3(x + 2) = 12$
- $4x - 4 - 3x - 6 = 12 \rightarrow x - 10 = 12 \rightarrow x = 22$

4.3 Casos especiales

Al final queda...	Significado	Ejemplo
$ax = b$ con $a \neq 0$	Una solución	$3x = 6 \rightarrow x = 2$
$0x = 0$	Infinitas soluciones (identidad)	$2(x + 1) = 2x + 2$
$0x = b$ con $b \neq 0$	Sin solución	$x + 1 = x + 3$

4.4 Despejar en fórmulas

Las mismas reglas sirven para despejar una letra en una fórmula. De $v = d/t$ se obtiene $d = v \cdot t$ y $t = d/v$. De la temperatura $F = 9C/5 + 32$ se obtiene $C = 5(F - 32)/9$.

4.5 Problemas con ecuaciones

El procedimiento: leer, elegir la incógnita, plantear, resolver y comprobar que la respuesta tiene sentido.

Ejemplo resuelto. Un padre tiene 40 años y su hijo 10. ¿Dentro de cuántos años la edad del padre será el doble que la del hijo?

- Incógnita: x = años que pasan.
- Planteamiento: $40 + x = 2(10 + x)$
- $40 + x = 20 + 2x \rightarrow x = 20$ años (padre 60, hijo 30).

Ejercicios del capítulo 4

1. Resuelve: $3(x - 2) + 4 = 2x + 7$.
2. Resuelve: $x/2 + x/3 = 10$.
3. Resuelve: $(2x + 1)/5 - (x - 3)/2 = 1$.

4. Despeja h en $A = (b \cdot h)/2$.

5. La suma de tres números consecutivos es 72. ¿Cuáles son?

Capítulo 5 · Inecuaciones y valor absoluto

Una inecuación compara con $<$, $>$, $\leq$ o $\geq$ en lugar de $=$. Su solución no es un número, sino un intervalo de números.

5.1 Intervalos

Notación	Desigualdad	Extremos
(a, b)	$a < x < b$	Abierto en ambos
$[a, b]$	$a \leq x \leq b$	Cerrado en ambos
$[a, b)$	$a \leq x < b$	Semiabierto
$(a, +\infty)$	$x > a$	Infinito siempre abierto
$(-\infty, b]$	$x \leq b$	Infinito siempre abierto

5.2 Resolver inecuaciones lineales

Se resuelven como las ecuaciones, con **una regla nueva**: al multiplicar o dividir por un número negativo, la desigualdad cambia de sentido.

Por qué: $2 < 5$, pero multiplicando por -1 queda $-2 > -5$.

Ejemplo resuelto. $3 - 2x \geq 11$

- $-2x \geq 8$
- Dividimos entre -2 y cambia el sentido: $x \leq -4$, es decir, $(-\infty, -4]$.

5.3 Inecuaciones de segundo grado

Para $x^2 - x - 6 < 0$:

1. Halla las raíces de $x^2 - x - 6 = 0$: $x = -2$ y $x = 3$.
2. Las raíces parten la recta en tres zonas: $(-\infty, -2)$, $(-2, 3)$, $(3, +\infty)$.
3. Prueba un número de cada zona. Con $x = 0$: $-6 < 0$, se cumple.
4. Solución: $(-2, 3)$.

5.4 Valor absoluto

El valor absoluto $|a|$ es la distancia de a al cero: $|-7| = 7$, $|7| = 7$.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Tipo	Equivale a	Ejemplo
$ x = a$ ($a \geq 0$)	$x = a$ o $x = -a$	$ x - 2 = 5 \rightarrow x = 7$ o $x = -3$
$ x < a$	$-a < x < a$	$ x - 1 < 3 \rightarrow -2 < x < 4$
$ x > a$	$x < -a$ o $x > a$	$ 2x > 6 \rightarrow x < -3$ o $x > 3$

Ejercicios del capítulo 5

1. Resuelve y escribe en intervalo: $5x - 3 > 2x + 9$.
2. Resuelve: $-4x + 1 \leq 13$.
3. Resuelve: $-1 < 2x + 3 \leq 7$.
4. Resuelve: $x^2 - 9 \geq 0$.
5. Resuelve: $|3x - 6| \leq 9$.

Capítulo 6 · Sistemas de ecuaciones

Un sistema son varias ecuaciones que deben cumplirse a la vez. Con dos incógnitas, cada ecuación lineal es una recta, y la solución es el punto donde se cortan.

6.1 Tres métodos para sistemas 2×2

Usaremos el mismo sistema en los tres métodos:

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Sustitución. Despeja una incógnita y sustitúyela en la otra ecuación.

- De la segunda: $x = 2 + y$
- En la primera: $2(2 + y) + y = 7 \rightarrow 4 + 3y = 7 \rightarrow y = 1$
- $x = 2 + 1 = 3$. Solución: **(3, 1)**

Igualación. Despeja la misma incógnita en ambas e iguala.

- $y = 7 - 2x$ y $y = x - 2$
- $7 - 2x = x - 2 \rightarrow 9 = 3x \rightarrow x = 3, y = 1$

Reducción. Suma o resta las ecuaciones para eliminar una incógnita.

- Sumando: $(2x + y) + (x - y) = 7 + 2 \rightarrow 3x = 9 \rightarrow x = 3$
- Sustituyendo: $y = 1$

6.2 Tipos de sistemas

Tipo	Soluciones	Rectas
Compatible determinado	Una	Se cortan en un punto
Compatible indeterminado	Infinitas	Coinciden
Incompatible	Ninguna	Paralelas

Ejemplo de incompatible: $x + y = 3$ y $x + y = 5$. Ningún par de números suma 3 y 5 a la vez.

6.3 Sistemas 3×3 : método de Gauss

La idea es convertir el sistema en escalonado (cada ecuación con una incógnita menos) y resolver de abajo hacia arriba.

Ejemplo resuelto.

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

- $E2 - 2 \cdot E1: -3y - z = -9$
- $E3 - E1: y - 2z = -4$
- De la segunda nueva: $y = 2z - 4$. Sustituyendo en la primera: $-3(2z - 4) - z = -9 \rightarrow -7z = -21 \rightarrow z = 3$
- $y = 2, x = 6 - 2 - 3 = 1$. Solución: **(1, 2, 3)**

En el capítulo 14 verás cómo hacer esto con matrices.

6.4 Sistemas no lineales

Se resuelven casi siempre por sustitución. Para $x + y = 5$ y $xy = 6$: $y = 5 - x$, luego $x(5 - x) = 6 \rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow x = 2$ o $x = 3$. Soluciones: (2, 3) y (3, 2).

Ejercicios del capítulo 6

1. Resuelve por sustitución: $x + 2y = 8$; $3x - y = 3$.
2. Resuelve por reducción: $4x + 3y = 18$; $2x - 3y = 0$.
3. Clasifica: $2x - 4y = 6$; $x - 2y = 3$.
4. En una granja hay gallinas y conejos: 30 cabezas y 80 patas. ¿Cuántos hay de cada?
5. Resuelve por Gauss: $x + y + z = 3$; $x - y + 2z = 8$; $2x + y - z = -2$.

Capítulo 7 · Polinomios y productos notables

Un polinomio es una suma de monomios, como $P(x) = 3x^4 - 2x^2 + x - 5$. Su grado es el mayor exponente (aquí, 4) y su término independiente es el que no lleva x (aquí, -5).

7.1 Suma, resta y multiplicación

- **Sumar o restar:** se reducen términos semejantes. $(3x^2 + 2x - 1) - (x^2 - 5x + 4) = 2x^2 + 7x - 5$.
- **Multiplicar:** cada término del primero por cada término del segundo, y luego se reduce.

Ejemplo resuelto. $(2x - 3)(x^2 + x - 4) = 2x^3 + 2x^2 - 8x - 3x^2 - 3x + 12 = 2x^3 - x^2 - 11x + 12$.

7.2 Productos notables

Son multiplicaciones tan frecuentes que conviene saberlas de memoria.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Error muy común: $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$. Con $a = 3$ y $b = 4$: $(3 + 4)^2 = 49$, pero $9 + 16 = 25$.

Ejemplos. $(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$; $(3x - 2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$; $(2x + 7)(2x - 7) = 4x^2 - 49$.

7.3 Binomio de Newton

Para potencias mayores, los coeficientes salen del triángulo de Pascal (cada número es la suma de los dos de encima):

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \ 1 \\ 1 \ 2 \ 1 \\ 1 \ 3 \ 3 \ 1 \\ 1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1 \end{array}$$

Así, $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$. En general:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

7.4 División de polinomios

Como con números: $P(x) = D(x) \cdot C(x) + R(x)$, con grado de R menor que el de D.

Regla de Ruffini (para dividir entre $x - a$). Dividimos $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ entre $x - 1$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & 11 & -6 \\ 1 & & 1 & -5 & 6 \\ & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

Cociente: $x^2 - 5x + 6$. Resto: 0, así que $x - 1$ divide exactamente a $P(x)$.

7.5 Teorema del resto

El resto de dividir $P(x)$ entre $x - a$ es $P(a)$. Consecuencia: si $P(a) = 0$, entonces $x - a$ es un factor de $P(x)$, y a es una **raíz** del polinomio.

Ejemplo: $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ y $P(2) = 8 - 24 + 22 - 6 = 0$, luego $x - 2$ también es factor.

Ejercicios del capítulo 7

1. Multiplica: $(x + 3)(2x^2 - x + 1)$.
2. Desarrolla: $(2x - 5)^2$.
3. Desarrolla: $(x + 2)^4$ usando el triángulo de Pascal.
4. Divide por Ruffini: $(2x^3 - 3x^2 - 5x + 6)$ entre $(x - 2)$.
5. Halla k para que $P(x) = x^3 + kx^2 - 4$ sea divisible por $x + 2$.

Capítulo 8 · Factorización y fracciones algebraicas

Factorizar es lo contrario de multiplicar: escribir un polinomio como producto de factores más simples. Es la herramienta que más se usa para simplificar y resolver ecuaciones.

8.1 Orden de ataque

Ante cualquier polinomio, prueba en este orden:

1. **Factor común:** $6x^3 - 9x^2 = 3x^2(2x - 3)$.
2. **Productos notables al revés:** $x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$; $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$.
3. **Trinomio $x^2 + bx + c$:** busca dos números que sumen b y multipliquen c . $x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$.
4. **Trinomio $ax^2 + bx + c$:** usa las raíces (capítulo 9): $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
5. **Grado 3 o más:** Ruffini con los divisores del término independiente.
6. **Agrupación:** $ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y) = (a + b)(x + y)$.

Ejemplo resuelto. Factoriza $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

- Divisores de -6 : $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.
- $P(1) = 0 \rightarrow$ factor $(x - 1)$. Ruffini da $x^2 - 5x + 6$.
- $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$.
- Resultado: $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$.

8.2 Fracciones algebraicas

Son cocientes de polinomios, como $(x + 1)/(x^2 - 1)$. Se manejan igual que las fracciones numéricas, con una precaución: el denominador nunca puede valer cero.

Simplificar: factoriza arriba y abajo y cancela factores (nunca sumandos).

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 + 4x + 4} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{(x + 2)^2} = \frac{x - 2}{x + 2}, \quad x \neq -2$$

Error típico: en $(x + 3)/3$ **no** se puede «tachar» el 3, porque es un sumando, no un factor.

8.3 Operaciones

- **Suma y resta:** común denominador con el mcm de los denominadores factorizados.
- **Producto:** numeradores entre sí y denominadores entre sí; simplifica antes de multiplicar.

- **Cociente:** multiplica por la inversa.

Ejemplo resuelto.

$$\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2(x+1) - (x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+3}{x^2-1}$$

Ejercicios del capítulo 8

1. Factoriza: $12a^2b - 18ab^2$.
2. Factoriza: $9x^2 - 16$.
3. Factoriza: $x^2 - x - 20$.
4. Factoriza: $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.
5. Simplifica: $(x^2 - 3x)/(x^2 - 9)$.
6. Opera: $3/x + 2/(x + 2)$.

Capítulo 9 · Ecuaciones cuadráticas

Una ecuación de segundo grado tiene la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$. Tiene como máximo dos soluciones, y una fórmula las da siempre.

9.1 Casos incompletos (sin fórmula)

- **Falta c:** $ax^2 + bx = 0 \rightarrow x(ax + b) = 0 \rightarrow x = 0$ o $x = -b/a$. Ejemplo: $3x^2 - 12x = 0 \rightarrow x = 0$ o $x = 4$.
- **Falta b:** $ax^2 + c = 0 \rightarrow x^2 = -c/a$. Ejemplo: $2x^2 - 50 = 0 \rightarrow x^2 = 25 \rightarrow x = \pm 5$.

9.2 La fórmula general

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

De dónde sale (completar el cuadrado). Partimos de $ax^2 + bx + c = 0$, dividimos entre a y sumamos $(b/2a)^2$ a ambos lados:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Sacando raíz cuadrada y despejando x se obtiene la fórmula.

Ejemplo resuelto. $2x^2 - 7x + 3 = 0$, con $a = 2$, $b = -7$, $c = 3$.

- $\Delta = 49 - 24 = 25$, $\sqrt{25} = 5$

- $x = (7 \pm 5)/4 \rightarrow x_1 = 3, x_2 = 1/2$

9.3 El discriminante

El número $\Delta = b^2 - 4ac$ (bajo la raíz) indica cuántas soluciones reales hay sin resolver la ecuación.

Discriminante	Soluciones reales	La parábola $y = ax^2 + bx + c...$
$\Delta > 0$	Dos distintas	Corta el eje X dos veces
$\Delta = 0$	Una doble	Toca el eje X en un punto
$\Delta < 0$	Ninguna (dos complejas)	No toca el eje X

9.4 Fórmulas de Cardano-Vieta

Si x_1 y x_2 son las soluciones, entonces:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Sirven para comprobar resultados y para construir una ecuación con raíces dadas: con raíces 2 y -5, la ecuación es $x^2 + 3x - 10 = 0$.

9.5 Ecuaciones que se reducen a cuadráticas

- **Bicuadradas** ($ax^4 + bx^2 + c = 0$): cambia $t = x^2$. Para $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$: $t^2 - 13t + 36 = 0 \rightarrow t = 4$ o $9 \rightarrow x = \pm 2, \pm 3$.
- **Con radicales**: aísla la raíz, eleva al cuadrado y **comprueba siempre**, porque aparecen soluciones falsas. Para $\sqrt{x+7} = x-5$: $x+7 = x^2 - 10x + 25 \rightarrow x^2 - 11x + 18 = 0 \rightarrow x = 9$ o $x = 2$. Solo $x = 9$ es válida (con $x = 2$ quedaría $3 = -3$).

Ejercicios del capítulo 9

1. Resuelve: $x^2 - 16x = 0$.
2. Resuelve: $x^2 - 5x - 14 = 0$.
3. Resuelve: $3x^2 + 2x - 1 = 0$.
4. Sin resolver, ¿cuántas soluciones reales tiene $4x^2 - 4x + 1 = 0$?
5. Resuelve: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.
6. Un rectángulo tiene 3 m más de largo que de ancho y su área es 40 m². Halla sus lados.

Capítulo 10 · Funciones

Una función f asigna a cada valor x de un conjunto (el dominio) **un único** valor $f(x)$. Es una máquina: entra un número, sale otro. Por ejemplo, $f(x) = 2x + 1$ convierte 3 en 7.

10.1 Dominio y recorrido

- **Dominio:** valores de x para los que la función tiene sentido.
- **Recorrido (imagen):** valores que puede tomar $f(x)$.

Tipo de función	Restricción	Ejemplo de dominio
Polinómica	Ninguna	$f(x) = x^2 - 3 \rightarrow \mathbb{R}$
Racional	Denominador $\neq 0$	$f(x) = 1/(x - 2) \rightarrow \mathbb{R} - \{2\}$
Raíz de índice par	Radicando ≥ 0	$f(x) = \sqrt{x + 4} \rightarrow [-4, +\infty)$
Logarítmica	Argumento > 0	$f(x) = \log(x - 1) \rightarrow (1, +\infty)$

10.2 Función lineal y afín

$f(x) = mx + n$ es una recta. m es la pendiente (cuánto sube y por cada unidad que avanza x) y n la ordenada en el origen (donde corta el eje Y).

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ejemplo resuelto. Recta que pasa por $(1, 3)$ y $(4, 9)$: $m = 6/3 = 2$. Con $y - 3 = 2(x - 1)$ se obtiene $y = 2x + 1$.

Dos rectas son paralelas si tienen la misma pendiente, y perpendiculares si $m_1 \cdot m_2 = -1$.

10.3 Función cuadrática

$f(x) = ax^2 + bx + c$ es una parábola. Si $a > 0$ abre hacia arriba (tiene un mínimo); si $a < 0$, hacia abajo (tiene un máximo).

- **Vértice:** $x = -b/(2a)$; se sustituye para obtener la y .
- **Cortes con el eje X:** las soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$.
- **Corte con el eje Y:** el punto $(0, c)$.

Ejemplo resuelto. $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Vértice en $x = 2$, $f(2) = -1 \rightarrow V(2, -1)$. Corta el eje X en $x = 1$ y $x = 3$, y el eje Y en $(0, 3)$.

10.4 Operaciones con funciones

- **Composición:** $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Con $f(x) = x + 1$ y $g(x) = x^2$: $(g \circ f)(x) = (x + 1)^2$, pero $(f \circ g)(x) = x^2 + 1$. El orden importa.
- **Función inversa:** f^{-1} deshace lo que hace f . Para hallarla, despeja x en $y = f(x)$ e intercambia letras. Si $f(x) = 3x - 2$, entonces $f^{-1}(x) = (x + 2)/3$.

10.5 Transformaciones de gráficas

A partir de la gráfica de $f(x)$:

Expresión	Efecto
$f(x) + k$	Sube k unidades
$f(x - h)$	Se desplaza h unidades a la derecha
$-f(x)$	Refleja respecto al eje X
$f(-x)$	Refleja respecto al eje Y
$a \cdot f(x)$, $a > 1$	Se estira verticalmente

10.6 Propiedades

- **Creciente / decreciente:** si al aumentar x aumenta (o disminuye) $f(x)$.
- **Par:** $f(-x) = f(x)$, simétrica respecto al eje Y (x^2 , $\cos x$).
- **Impar:** $f(-x) = -f(x)$, simétrica respecto al origen (x^3 , $\sin x$).

Ejercicios del capítulo 10

1. Halla el dominio de $f(x) = \sqrt{6 - 2x}$.
2. Halla el dominio de $f(x) = (x + 1)/(x^2 - 4)$.
3. Halla la recta que pasa por $(-2, 5)$ y $(2, -3)$.
4. Halla el vértice y los cortes con los ejes de $f(x) = -x^2 + 2x + 8$.
5. Con $f(x) = 2x - 1$ y $g(x) = x^2 + 1$, calcula $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(2)$.
6. Halla la inversa de $f(x) = (x + 5)/2$.

Capítulo 11 · Exponenciales y logaritmos

Las exponenciales describen lo que crece (o decrece) en proporción a sí mismo: poblaciones, intereses, desintegración radiactiva. Los logaritmos son su operación inversa: responden a «¿a qué exponente hay que elevar?».

11.1 Función exponencial

$f(x) = a^x$ con $a > 0$ y $a \neq 1$.

- Si $a > 1$, crece (2^x). Si $0 < a < 1$, decrece ($(1/2)^x$).
- Siempre es positiva y pasa por $(0, 1)$.
- El número $e \approx 2,71828$ es la base más importante en ciencias: e^x aparece en todo crecimiento continuo.

Interés compuesto. Un capital C al r % anual durante t años se convierte en:

$$C_f = C \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$$

Con 1 000 € al 5 % durante 10 años: $1\,000 \cdot 1,05^{10} \approx 1\,628,89$ €.

11.2 Logaritmos

$$\log_a x = y \iff a^y = x \quad (a > 0, a \neq 1, x > 0)$$

Ejemplos: $\log_2 8 = 3$ porque $2^3 = 8$; $\log 1000 = 3$ (base 10); $\ln e^2 = 2$ (base e).

11.3 Propiedades

Propiedad	Fórmula
Logaritmo de 1 y de la base	$\log_a 1 = 0 \cdot \log_a a = 1$
Producto	$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
Cociente	$\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$
Potencia	$\log_a (x^n) = n \cdot \log_a x$
Cambio de base	$\log_a x = \log x / \log a$

No existe regla para $\log_a (x + y)$: no se simplifica.

Ejemplo resuelto. Sabiendo $\log 2 \approx 0,301$, calcula $\log 40 = \log(2^2 \cdot 10) = 2 \cdot 0,301 + 1 = 1,602$.

11.4 Ecuaciones exponenciales

- **Igualar bases:** $2^{(x+1)} = 32 = 2^5 \rightarrow x + 1 = 5 \rightarrow x = 4$.
- **Tomar logaritmos:** $3^x = 20 \rightarrow x = \log 20 / \log 3 \approx 2,727$.
- **Cambio de variable:** $4^x - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$. Con $t = 2^x$: $t^2 - 3t - 4 = 0 \rightarrow t = 4$ ($t = -1$ no vale, $2^x > 0$) $\rightarrow x = 2$.

11.5 Ecuaciones logarítmicas

Se agrupan logaritmos con las propiedades y se pasa a forma exponencial. **Comprueba siempre** que los argumentos quedan positivos.

Ejemplo resuelto. $\log x + \log(x - 3) = 1$

- $\log[x(x - 3)] = 1 \rightarrow x^2 - 3x = 10 \rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \rightarrow x = 5$ o $x = -2$
- $x = -2$ no vale (log de negativo). Solución: **$x = 5$** .

Ejercicios del capítulo 11

1. Calcula: $\log_3 81$, $\log_5 (1/25)$ y $\log 0,001$.
2. Desarrolla: $\log (x^3 y / z^2)$.
3. Resuelve: $5^{(2x - 1)} = 125$.
4. Resuelve: $2^x = 50$ (con dos decimales).
5. Resuelve: $\log_2 (x + 3) + \log_2 (x - 3) = 4$.
6. Una población de bacterias se duplica cada hora. Si empieza con 500, ¿cuántas horas tarda en llegar a 64 000?

Capítulo 12 · Sucesiones, series e inducción

Una sucesión es una lista ordenada de números $a_1, a_2, a_3, \dots$. La fórmula del término general a_n permite calcular cualquier término sin escribir los anteriores.

12.1 Progresiones aritméticas

Cada término se obtiene sumando una cantidad fija d (la diferencia): 3, 7, 11, 15... ($d = 4$).

$$a_n = a_1 + (n-1)d \quad S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Ejemplo resuelto (el truco de Gauss). Suma de 1 a 100: $S_{100} = (1 + 100) \cdot 100 / 2 = 5\,050$.

12.2 Progresiones geométricas

Cada término se obtiene multiplicando por una cantidad fija r (la razón): 2, 6, 18, 54... ($r = 3$).

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \quad S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

Si $|r| < 1$, la suma de **infinitos** términos es un número finito:

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1 - r}$$

Ejemplo: $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots = 1/(1 - 1/2) = 2$. Así también se demuestra que $0,999\dots = 9/10 + 9/100 + \dots = 0,9/(1 - 0,1) = 1$.

12.3 Notación sumatoria

El símbolo Σ abrevia sumas largas:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

12.4 Inducción matemática

Es la forma de demostrar que algo es cierto para **todos** los naturales. Funciona como una fila de fichas de dominó:

1. **Caso base:** se comprueba para $n = 1$ (cae la primera ficha).
2. **Paso inductivo:** se supone cierto para $n = k$ y se demuestra para $n = k + 1$ (cada ficha tumba a la siguiente).

Ejemplo resuelto. Demuestra que $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

- Base: $n = 1 \Rightarrow 1 = 1^2$. Cierto.
- Hipótesis: $1 + 3 + \dots + (2k - 1) = k^2$.
- Paso: sumamos el siguiente impar, $2k + 1$: $k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$. Es justo la fórmula para $k + 1$. ■

Ejercicios del capítulo 12

1. En una progresión aritmética, $a_1 = 5$ y $d = 3$. Halla a_{20} y S_{20} .

2. En una geométrica, $a_1 = 3$ y $r = 2$. Halla a_8 y S_8 .
3. Calcula: $9 + 3 + 1 + 1/3 + \dots$
4. Escribe 0,4545... como fracción usando una serie geométrica.
5. Demuestra por inducción que $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$.

Capítulo 13 · Números complejos

La ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución real. Para resolverla se inventa un número nuevo, la **unidad imaginaria** i , definida por $i^2 = -1$. Con ella, toda ecuación polinómica tiene solución.

13.1 Forma binómica

Un complejo es $z = a + bi$, con a (parte real) y b (parte imaginaria) reales. Ejemplo: $\sqrt{-16} = 4i$, así que $x^2 + 16 = 0$ tiene soluciones $\pm 4i$.

Las potencias de i se repiten cada cuatro: $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$. Para i^n , divide n entre 4 y usa el resto: $i^{23} = i^3 = -i$.

13.2 Operaciones

- **Suma:** $(3 + 2i) + (1 - 5i) = 4 - 3i$.
- **Producto** (como polinomios, con $i^2 = -1$): $(2 + 3i)(1 - i) = 2 - 2i + 3i - 3i^2 = 5 + i$.
- **Conjugado:** el conjugado de $z = a + bi$ es $a - bi$, y $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$ (un número real).
- **División:** se multiplica arriba y abajo por el conjugado del denominador.

$$\frac{3+i}{1-2i} \cdot \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{3+6i+i+2i^2}{1+4} = \frac{1+7i}{5} = \frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$$

13.3 El plano complejo y la forma polar

Cada complejo $a + bi$ es un punto (a, b) del plano. Su distancia al origen es el **módulo** y el ángulo con el eje real es el **argumento**:

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \theta = \arctan \frac{b}{a}$$

En forma polar, $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, que la fórmula de Euler abrevia como $z = r \cdot e^{i\theta}$. Ejemplo: $1 + i$ tiene $r = \sqrt{2}$ y $\theta = 45^\circ$.

13.4 Multiplicar y elevar en forma polar

En forma polar, multiplicar es fácil: se multiplican módulos y se suman argumentos. Para potencias, la fórmula de De Moivre:

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

Ejemplo resuelto. $(1 + i)^8 = (\sqrt{2})^8 \cdot (\cos 360^\circ + i \sin 360^\circ) = 16$.

Y una identidad célebre, que une los cinco números más importantes:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

13.5 Teorema fundamental del álgebra

Todo polinomio de grado $n \geq 1$ con coeficientes complejos tiene exactamente n raíces complejas (contando repeticiones). Si los coeficientes son reales, las raíces no reales aparecen en parejas conjugadas.

Ejemplo: $x^2 - 4x + 13 = 0$ tiene $\Delta = -36$ y soluciones $x = (4 \pm 6i)/2 = 2 \pm 3i$.

Ejercicios del capítulo 13

1. Calcula i^{45} e i^{102} .
2. Calcula: $(4 - 3i)(2 + 5i)$.
3. Calcula: $(2 + 4i)/(1 + i)$.
4. Halla módulo y argumento de $-1 + \sqrt{3}i$.
5. Resuelve: $x^2 + 2x + 5 = 0$.
6. Calcula $(\sqrt{3} + i)^6$ con De Moivre.

Capítulo 14 · Matrices y determinantes

Una matriz es una tabla rectangular de números con m filas y n columnas (dimensión $m \times n$). Las matrices permiten escribir y resolver sistemas grandes de forma compacta, y son la base de la informática gráfica, la estadística y la inteligencia artificial.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

14.1 Tipos de matrices

- **Cuadrada:** igual número de filas y columnas.
- **Identidad I:** unos en la diagonal y ceros fuera; es el «1» de las matrices ($A \cdot I = A$).
- **Traspuesta A^t :** se cambian filas por columnas.
- **Simétrica:** $A = A^t$.

14.2 Operaciones

- **Suma:** elemento a elemento (mismas dimensiones).
- **Producto por un número:** se multiplica cada elemento.
- **Producto de matrices:** el elemento (i, j) de $A \cdot B$ es la fila i de A «por» la columna j de B . Solo es posible si el número de columnas de A coincide con el de filas de B .

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 5 \\ 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 11 \\ -4 & 23 \end{pmatrix}$$

Atención: el producto de matrices **no es conmutativo**; en general $A \cdot B \neq B \cdot A$.

14.3 Determinantes

El determinante es un número asociado a cada matriz cuadrada. Si vale 0, la matriz «aplasta» el espacio y no tiene inversa.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Para 3×3 , la regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

Ejemplo: $|A| = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$.

Propiedades clave: $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$; $|A^t| = |A|$; si se intercambian dos filas, el determinante cambia de signo; si dos filas son proporcionales, vale 0.

14.4 Matriz inversa

A^{-1} es la matriz que cumple $A \cdot A^{-1} = I$. Existe si y solo si $|A| \neq 0$. Para 2×2 :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Para A: $A^{-1} = (1/-2) \cdot [[4, -2], [-3, 1]] = [[-2, 1], [3/2, -1/2]]$.

14.5 Resolver sistemas con matrices

Un sistema se escribe $A \cdot X = B$, donde A son los coeficientes, X las incógnitas y B los términos independientes.

- **Con la inversa:** $X = A^{-1} \cdot B$.
- **Regla de Cramer:** cada incógnita es un cociente de determinantes. Para x: se sustituye la columna de x por B.

Ejemplo resuelto. $2x + y = 7$; $x - y = 2$. $|A| = 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -3$.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-9}{-3} = 3 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-3}{-3} = 1$$

Rango y teorema de Rouché-Frobenius. El rango es el número de filas linealmente independientes. Si $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|B) = n$,º de incógnitas, el sistema es compatible determinado; si los rangos coinciden pero son menores, indeterminado; si son distintos, incompatible.

Ejercicios del capítulo 14

1. Con A y B de este capítulo, calcula $B \cdot A$ y comprueba que es distinto de $A \cdot B$.
2. Calcula el determinante de $[[2, 1, 0], [1, 3, -1], [0, 2, 4]]$.
3. Halla la inversa de $[[3, 1], [5, 2]]$.
4. Resuelve por Cramer: $3x - 2y = 4$; $x + 4y = 6$.
5. ¿Para qué valor de k no tiene inversa la matriz $[[k, 2], [8, k]]$?

Capítulo 15 · Espacios vectoriales y transformaciones lineales

El álgebra lineal estudia los objetos que se pueden sumar entre sí y multiplicar por números: flechas en el plano, polinomios, funciones, señales de audio. Todos comparten la misma estructura, el espacio vectorial.

15.1 Vectores en $\mathbb{R}^n$

Un vector de $\mathbb{R}^2$ es un par (x, y) ; de $\mathbb{R}^3$, una terna (x, y, z) .

- **Suma:** $(1, 2) + (3, -1) = (4, 1)$.
- **Producto por escalar:** $3 \cdot (1, 2) = (3, 6)$.
- **Producto escalar:** $u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots$. Si vale 0, los vectores son perpendiculares.
- **Norma (longitud):** $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$. Para $(3, 4)$: $\|v\| = 5$.

15.2 Espacio vectorial

Un conjunto V con una suma y un producto por escalares es un espacio vectorial si cumple ocho axiomas: la suma es asociativa y conmutativa, tiene neutro (vector 0) y opuestos; y el producto por escalares es distributivo, asociativo y cumple $1 \cdot v = v$.

Ejemplos: $\mathbb{R}^n$, los polinomios de grado $\leq n$, las matrices $m \times n$, las funciones continuas.

Subespacio: un subconjunto que, por sí mismo, es espacio vectorial. Basta con que contenga el 0 y sea cerrado para sumas y productos por escalares. La recta $y = 2x$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$; la recta $y = 2x + 1$ no (no pasa por el origen).

15.3 Combinación lineal, independencia y base

- **Combinación lineal** de $v_1, \dots, v_k$: cualquier $a_1v_1 + \dots + a_kv_k$.
- **Linealmente independientes:** ninguno es combinación lineal de los otros; equivale a que $a_1v_1 + \dots + a_kv_k = 0$ solo tenga la solución $a_1 = \dots = a_k = 0$.
- **Sistema generador:** sus combinaciones lineales llenan todo el espacio.
- **Base:** generador e independiente a la vez. Todas las bases de un espacio tienen el mismo número de vectores: la **dimensión**.

La base canónica de $\mathbb{R}^3$ es $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$, así que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

Ejemplo resuelto. ¿Son independientes $(1, 2)$ y $(2, 4)$? No: $(2, 4) = 2 \cdot (1, 2)$. Y el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$ lo confirma.

15.4 Transformaciones lineales

Una aplicación $T: V \rightarrow W$ es lineal si respeta las dos operaciones:

$$T(u+v) = T(u)+T(v) \quad T(\lambda v) = \lambda T(v)$$

Toda transformación lineal entre espacios de dimensión finita se representa con una matriz: $T(x) = A \cdot x$. Por ejemplo, el giro de 90° en el plano:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- **Núcleo:** vectores que T envía al 0.
- **Imagen:** vectores que se alcanzan.
- **Teorema de la dimensión:** $\dim V = \dim \text{Núcleo} + \dim \text{Imagen}$.

15.5 Valores y vectores propios

Un vector propio $v \neq 0$ es uno al que la matriz solo estira o encoge, sin cambiarle la dirección: $A \cdot v = \lambda \cdot v$. El número λ es su valor propio. Se hallan resolviendo la ecuación característica:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Ejemplo resuelto. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. $\det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)^2 - 1 = 0 \rightarrow \lambda = 1$ o $\lambda = 3$. Para $\lambda = 3$, el vector propio es $(1, 1)$; para $\lambda = 1$, es $(1, -1)$.

Los valores propios están detrás del algoritmo PageRank de Google, del análisis de componentes principales y de la mecánica cuántica.

Ejercicios del capítulo 15

1. Calcula el producto escalar de $(2, -1, 3)$ y $(1, 4, 0)$ y la norma del primero.
2. ¿Son linealmente independientes $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ y $(1, 1, 0)$?
3. ¿Es $\{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$ un subespacio de $\mathbb{R}^3$? ¿De qué dimensión?
4. Comprueba si $T(x, y) = (x + y, 2x)$ es lineal y escribe su matriz.
5. Halla los valores propios de $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Capítulo 16 · Estructuras algebraicas: grupos, anillos y cuerpos

Este es el «100» del libro. El álgebra abstracta deja de preguntar *qué números* hay y pregunta *qué reglas* cumplen las operaciones. Así, un mismo teorema vale a la vez para números, matrices, rotaciones o relojes.

16.1 Operación interna

Una operación $*$ en un conjunto G es interna si $a * b$ sigue estando en G . La suma en $\mathbb{N}$ es interna; la resta en $\mathbb{N}$ no ($3 - 5 \notin \mathbb{N}$).

16.2 Grupos

$(G, *)$ es un **grupo** si la operación es interna y cumple:

1. **Asociativa:** $(a * b) * c = a * (b * c)$.
2. **Neutro:** existe e con $a * e = e * a = a$.
3. **Inverso:** cada a tiene un a^{-1} con $a * a^{-1} = e$.

Si además es conmutativo, se llama grupo **abeliano**.

Ejemplo	¿Grupo?	Motivo
$(\mathbb{Z}, +)$	Sí, abeliano	Neutro 0, inverso $-a$
$(\mathbb{N}, +)$	No	3 no tiene opuesto en $\mathbb{N}$
$(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$	Sí, abeliano	Neutro 1, inverso $1/a$
Matrices invertibles $n \times n$ con $\cdot$	Sí, no abeliano	$A \cdot B \neq B \cdot A$
Giros de un cuadrado ($0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$)	Sí, abeliano	Componer giros da otro giro

16.3 Aritmética modular: $\mathbb{Z}_n$

Es la aritmética del reloj: se trabaja con los restos de dividir entre n . En $\mathbb{Z}_{12}$, $9 + 5 = 2$ (las 9 más 5 horas son las 2). Se escribe $14 \equiv 2 \pmod{12}$.

$(\mathbb{Z}_n, +)$ es siempre un grupo abeliano de n elementos. Su tabla para $n = 4$:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Teorema de Lagrange. En un grupo finito, el número de elementos de cualquier subgrupo divide al número de elementos del grupo. Un grupo de 7 elementos solo puede tener subgrupos de 1 o 7 elementos.

16.4 Anillos

$(A, +, \cdot)$ es un **anillo** si $(A, +)$ es grupo abeliano, el producto es asociativo y se cumple la distributiva. Ejemplos: $\mathbb{Z}$, los polinomios, las matrices cuadradas, $\mathbb{Z}_n$.

En algunos anillos pasan cosas extrañas: en $\mathbb{Z}_6$, $2 \cdot 3 = 0$ aunque ni 2 ni 3 son 0. Se llaman **divisores de cero**.

16.5 Cuerpos

Un **cuerpo** es un anillo conmutativo con 1 donde todo elemento distinto de 0 tiene inverso para el producto. Es decir, se puede sumar, restar, multiplicar y dividir sin salir del conjunto.

- $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son cuerpos. $\mathbb{Z}$ no lo es (2 no tiene inverso entero).
- $\mathbb{Z}_p$ es un cuerpo **si y solo si p es primo**. En $\mathbb{Z}_7$, el inverso de 3 es 5, porque $3 \cdot 5 = 15 \equiv 1 \pmod{7}$.

Los cuerpos finitos $\mathbb{Z}_p$ sostienen la criptografía moderna (RSA, curvas elípticas) y los códigos que corrigen errores en códigos QR y comunicaciones.

16.6 Homomorfismos

Un homomorfismo es una función entre dos estructuras que respeta las operaciones: $f(a * b) = f(a) \circ f(b)$. Ejemplo: $f(x) = e^x$ lleva $(\mathbb{R}, +)$ a $(\mathbb{R}^+, \cdot)$, porque $e^{(a+b)} = e^a \cdot e^b$. Como además es biyectiva, es un **isomorfismo**: ambos grupos son «el mismo» con distinto disfraz. Los logaritmos funcionan justo por esto.

Ejercicios del capítulo 16

1. ¿Es $(\mathbb{Z}, -)$ un grupo? Justifica.
2. Calcula en $\mathbb{Z}_9$: $7 + 5$, $4 \cdot 7$ y el opuesto de 4.
3. Halla el inverso de 4 en $\mathbb{Z}_{11}$.
4. Encuentra dos divisores de cero en $\mathbb{Z}_8$.
5. ¿Puede un grupo de 10 elementos tener un subgrupo de 4 elementos? ¿Por qué?

Soluciones a los ejercicios

Capítulo 1

1. -2
2. -24
3. 20 (el corchete vale $4 - 4 = 0$)
4. $-4 \in \mathbb{Z} \cdot 0,25 \in \mathbb{Q} \cdot \sqrt{9} = 3 \in \mathbb{N} \cdot \sqrt{5}$ irracional $\cdot 7/3 \in \mathbb{Q}$
5. $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ y $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \rightarrow \text{MCD} = 42, \text{mcm} = 252$

Capítulo 2

1. $8/12 - 3/12 + 10/12 = 15/12 = 5/4$
2. $3/5 \cdot 10/9 = 2/3$
3. $(x^{-2})^2 / x^{-6} = x^{-4} \cdot x^6 = x^2$
4. $16^{(3/4)} = 2^3 = 8$
5. $4(\sqrt{7} - \sqrt{3})/(7 - 3) = \sqrt{7} - \sqrt{3}$

Capítulo 3

1. $3x - 7 = x/2$
2. Coeficiente -5, parte literal x^3y^2 , grado 5
3. $9 + 12 + 4 = 25$
4. $3x^2 + 2x - 7$
5. $3a + 6b$

Capítulo 4

1. $x = 9$
2. $5x/6 = 10 \rightarrow x = 12$
3. $2(2x + 1) - 5(x - 3) = 10 \rightarrow x = 7$
4. $h = 2A/b$
5. $x + (x + 1) + (x + 2) = 72 \rightarrow 23, 24 \text{ y } 25$

Capítulo 5

1. $x > 4 \rightarrow (4, +\infty)$
2. $x \geq -3 \rightarrow [-3, +\infty)$
3. $-2 < x \leq 2 \rightarrow (-2, 2]$
4. $x \leq -3 \text{ o } x \geq 3 \rightarrow (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

5. $-1 \leq x \leq 5 \rightarrow [-1, 5]$

Capítulo 6

1. $(2, 3)$

2. $(3, 2)$

3. Compatible indeterminado (la primera es el doble de la segunda)

4. 20 gallinas y 10 conejos

5. $(1, -1, 3)$

Capítulo 7

1. $2x^3 + 5x^2 - 2x + 3$

2. $4x^2 - 20x + 25$

3. $x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$

4. Cociente $2x^2 + x - 3$, resto 0

5. $P(-2) = -8 + 4k - 4 = 0 \rightarrow k = 3$

Capítulo 8

1. $6ab(2a - 3b)$

2. $(3x + 4)(3x - 4)$

3. $(x - 5)(x + 4)$

4. $(x - 2)(x + 1)(x + 3)$

5. $x/(x + 3)$, con $x \neq \pm 3$

6. $(5x + 6)/(x^2 + 2x)$

Capítulo 9

1. $x = 0$ o $x = 16$

2. $x = 7$ o $x = -2$

3. $x = 1/3$ o $x = -1$

4. $\Delta = 0 \rightarrow$ una solución doble ($x = 1/2$)

5. $x = \pm 1, \pm 2$

6. $x(x + 3) = 40 \rightarrow$ 5 m de ancho y 8 m de largo

Capítulo 10

1. $(-\infty, 3]$

2. $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

3. $y = -2x + 1$
4. Vértice (1, 9); corta el eje X en $x = -2$ y $x = 4$; el eje Y en (0, 8)
5. $(f \circ g)(x) = 2x^2 + 1$; $(g \circ f)(2) = g(3) = 10$
6. $f^{-1}(x) = 2x - 5$

Capítulo 11

1. 4, -2 y -3
2. $3 \log x + \log y - 2 \log z$
3. $2x - 1 = 3 \rightarrow x = 2$
4. $x = \log 50 / \log 2 \approx 5,64$
5. $x^2 - 9 = 16 \rightarrow x = 5$ ($x = -5$ no vale)
6. $500 \cdot 2^t = 64\,000 \rightarrow 2^t = 128 \rightarrow 7$ horas

Capítulo 12

1. $a_{20} = 62$; $S_{20} = 670$
2. $a_8 = 384$; $S_8 = 765$
3. $9/(1 - 1/3) = 27/2$
4. $0,45/(1 - 0,01) = 45/99 = 5/11$
5. Base: $2 = 1 \cdot 2$. Paso: $k(k + 1) + 2(k + 1) = (k + 1)(k + 2)$. ■

Capítulo 13

1. $i^{45} = i$; $i^{102} = -1$
2. $23 + 14i$
3. $(2 + 4i)(1 - i)/2 = 3 + i$
4. Módulo 2, argumento 120° (segundo cuadrante)
5. $x = -1 \pm 2i$
6. Módulo 2, argumento $30^\circ \rightarrow 2^6(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = -64$

Capítulo 14

1. $B \cdot A = [[3, 4], [14, 18]]$, distinta de $A \cdot B = [[-2, 11], [-4, 23]]$
2. $2 \cdot (12 + 2) - 1 \cdot (4 - 0) + 0 = 24$
3. Determinante 1 $\rightarrow [[2, -1], [-5, 3]]$
4. $|A| = 14 \rightarrow x = 28/14 = 2$; $y = 14/14 = 1$
5. $k^2 - 16 = 0 \rightarrow k = \pm 4$

Capítulo 15

1. Producto escalar -2 ; norma $\sqrt{14}$
2. Sí; el determinante de los tres vectores vale $-2 \neq 0$
3. Sí; es un plano por el origen, de dimensión 2
4. Es lineal; su matriz es $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$
5. $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$ y $\lambda = 5$

Capítulo 16

1. No: la resta no es asociativa, pues $(5 - 3) - 1 = 1$ y $5 - (3 - 1) = 3$
 2. $7 + 5 = 3$; $4 \cdot 7 = 1$; el opuesto de 4 es 5
 3. 3, porque $4 \cdot 3 = 12 \equiv 1 \pmod{11}$
 4. 2 y 4, porque $2 \cdot 4 = 8 \equiv 0 \pmod{8}$
 5. No: por el teorema de Lagrange, 4 no divide a 10
-

Contraportada

¿Y si el álgebra no fuera difícil, sino solo mal contada?

Álgebra de 0 a 100 es un recorrido completo y sin saltos: empieza sumando números negativos y termina en grupos, anillos y cuerpos, la matemática que hoy protege tus contraseñas y hace funcionar los buscadores.

En 16 capítulos encontrarás:

- Explicaciones claras, con el porqué de cada regla y no solo el cómo.
- Decenas de ejemplos resueltos paso a paso.
- 85 ejercicios con todas sus soluciones.
- Los errores más comunes señalados antes de que los cometas.

Para estudiantes de ESO, Bachillerato y primeros cursos universitarios, para quien prepara una oposición o un acceso, y para cualquier adulto que quiera reconciliarse con las matemáticas.

Marlon Falcón Hernández · Valencia

«Lo que se aprende paso a paso no se olvida de golpe.»

¿Y si el álgebra no fuera difícil, sino solo mal contada?

Álgebra de 0 a 100 es un recorrido completo y sin saltos: empieza sumando números negativos y termina en grupos, anillos y cuerpos, la matemática que hoy protege tus contraseñas y hace funcionar los buscadores.

EN 16 CAPÍTULOOS ENCONTRARÁS

- Explicaciones claras, con el porqué de cada regla y no solo el cómo.
- Decenas de ejemplos resueltos paso a paso.
- 85 ejercicios con todas sus soluciones.
- Los errores más comunes señalados antes de que los cometes.

Para estudiantes de ESO, Bachillerato y primeros cursos universitarios, para quien prepara una oposición o un acceso, y para cualquier adulto que quiera reconciliarse con las matemáticas.

«Lo que se aprende paso a paso no se olvida de golpe.»

Marlon Falcón Hernández

Valencia · 2026



ÁLGEBRA DE 0 A 100